

Filtros Digitais

Leonardo C. de Araújo

17 de fevereiro de 2006

0.1 Filtros Digitais

No mundo tecnológico em que vivemos estamos sempre interessados em medir grandezas que, em geral, variam com o tempo. Chamemos de $f(t)$ essa função que representa a variação da grandeza ao longo do tempo. Alguns exemplos de grandezas de interesse são: pressão arterial, luminosidade de uma estrela, amplitude de vibração em um terremoto, fluxo de um líquido em um canal, pressão acústica de sinais sonoros, diferença de potencial ao longo de uma linha de transmissão. Para que esses dados possam ser utilizados em um computador, é necessário que sejam convertido na forma digital, ou seja, a função variante no tempo que descreve uma certa grandeza deve ser inicialmente amostrada. Ao invés de tratarmos com um universo infinito (contínuo) de valores, iremos agora tratar de um número finitos de valores, que devem ser bem escolhido para representar fielmente a informação contida na função original. Para tanto, devemos respeitar as condições do teorema da amostragem. Temos agora uma seqüência finita de valores $f[n]$. Além de amostrar a função f será necessário realizar a quantização, pois as amostras não podem assumir qualquer valor no discurso dos números reais. Os valores que podem ser assumidos são quantizados, sendo o nível de quantização determinado pela resolução que nos é dada. Se cada amostra for representada digitalmente por 8 bits, teremos $2^8 = 256$ níveis possíveis para os valores das amostras.

Filtros Digitais são filtros que atuam sobre sinais representados na forma digital, são elementos que irão exercer um certo processamento sobre os dados do sinal, produzindo um outro sinal, no qual teremos uma modificação da informação contida no sinal original. Filtros podem ser usador, por exemplo, para segregar inforções de faixas de frequências diferentes, para remoção de ruído, ou ainda para resaltar determinadas informações. Mais sobre a utilidade dos filtros será discutido posteriormente.

Figura 1: Filtro

A utilização de filtros digitais ao invés dos analógicos traz algumas vantagens. Os filtros digitais são programáveis, ou seja, o seu funcionamento é determinado por um programa armazenado em uma memória. Mudar esse programa é extremamente fácil, e não é necessário redesenhar o circuito do filtro, como é o caso dos filtros analógicos. Os filtros digitais são facilmente implementados e testado, já que não é necessário a construção de circuitos especiais para cada implementação, como é o caso dos filtros analógicos. Mudanças de temperatura acarretam alteração no funcionamento dos circuitos analógicos, o que não ocorre nos filtros digitais. Além disso, os filtros digitais são mais versáteis, sendo possível processar os sinais das mais variadas formas, sendo possível, inclusive, adaptarem-se de acordo com o sinal de entrada.

0.1.1 Filtro Não-Recursivo

Mudaremos daqui para frente a notação, e nossa função f será agora x , e portanto, as amostras dessa função serão chamadas $x[n]$.

A forma de filtro mais simples é a dos filtros não-recursivos, definidos pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k x[n-k] \quad (1)$$

$x[n]$ é o sinal de entrada do filtro, $y[n]$ o sinal de saída e b_k os coeficientes de filtro. O filtro aqui definido é constituído por um vetor $\{b_k\}$ de coeficientes e o processo de filtragem nada mais é do que uma convolução do sinal de entrada com os coeficientes do filtro.

Na prática, o número de produto que podemos realizar é um número finitos. Requereremos então que os filtros digitais tenham tamanho finito, em geral, assumimos que o comprimento do vetor de coeficientes do filtro é muito menor que o número de amostras do sinal. Desta forma, a equação 1 torna-se:

$$y[n] = \sum_{k=-N}^N b_k x[n-k] \quad (2)$$

Para a implementação desses filtros digitais em tempo real encontraremos ainda mais um percalço, não podemos requisitar que o valor da saída no instante atual dependa de valores futuros da entrada. Um filtro deve então ser causal. A equação 3 se reduzirá a:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad (3)$$

Os filtros não-recursivos são também conhecidos como filtros FIR¹ (filtros de resposta ao impulso finita). São filtros em que a resposta ao impulso atinge zero após um determinado tempo, ao contrário dos filtros de resposta infinita, que possuem uma realimentação, e podem assim continuar respondendo indefinidamente.

0.1.2 Filtro Recursivo

O que difere um filtro recursivo de um não-recursivo é que neste, o valor do sinal na saída dependete, única e exclusivamente, do valor do sinal da entrada. Já naquele, o sinal de saída é uma função tanto da entrada, quanto da saída. Para um filtro recursivo causal, a sua equação de diferenças será:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] + \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \quad (4)$$

¹FIR: Finite Impulse Response

Podemos facilmente verificar que os filtros não-recursivos são um caso especial de filtros recursivos em que os coeficientes a_k 's são todos iguais a zero, ou seja, elimina-se a realimentação.

0.1.3 Transformada Z

A transformada Z é uma ferramenta matemática para converter o sinal discreto no tempo, que é uma seqüência de números reais, em uma representação no domínio complexo da freqüência.

O nome “transformada Z” foi dado de forma semelhante ao nome “transformada S” para a transformada de Laplace. Para sermos mais precisos, deveríamos chamá-la de “transformada de Laurent”, pois é baseada nas séries de Laurent. A transformada Z (unilateral) é para o domínio do tempo discreto o que a transformada de Laplace unilateral é para sinais no domínio do tempo contínuo.

A transformada Z bilateral é definida por:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (5)$$

onde n é um número inteiro, z é um número complexo, $z = Ae^{j\phi}$.

Note que existe uma relação entre a transformada Z e a transformada de Fourier. A transformada Z se reduz à transformada de Fourier quando fazemos $z = e^{-j\omega}$.

$$X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (6)$$

Para melhor vermos a relação entre a transformada Z e a transformada de Fourier, olhemos a representação do plano complexo na figura 2. Um ponto z no plano complexo é dado por $z = re^{j\omega}$. A função $X(z)$ é definida em todo o plano. $X(e^{j\omega})$, por outro lado, é definido apenas onde $|z| = 1$, no círculo unitário. Temos, por exemplo, $z = 1$ para $\omega = 0$ e $z = -1$ para $\omega = \pi$. Representando a transformada de Fourier como a transformada Z no círculo unitário, podemos facilmente ver a periodicidade da transformada de Fourier.

A transformada Z unilateral é definida:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7)$$

0.1.4 Transformada Z inversa

A transformada Z inversa é obtida através da seguinte equação:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (8)$$

onde C é um caminho fechado de orientação anti-horária que envolve a origem e está inteiramente dentro da região de convergência (ROC²). O contorno ou

²ROC: Region Of Convergence

Figura 2: Plano Complexo

caminho C deve envolver todos os pólos de $X(z)$.

Um caso específico desse contorno C é o círculo unitário, bastando para tanto fazer $z = e^{j\omega}$. Ao longo desse caminho ω varia de $-\pi$ a π . A equação 8 fica da seguinte forma:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})(e^{j\omega})^{n-1}e^{j\omega}j d\omega \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad (11)$$

0.1.5 Algumas Propriedades

Vejamos algumas propriedades da transformada Z.

Linearidade A transformada Z da combinação de dois sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é a combinação linear das transformadas desses sinais.

$$Z\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])z^{-n} \quad (12)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha x_1[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta x_2[n]z^{-n} \quad (13)$$

$$= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} \quad (14)$$

$$= \alpha Z\{x_1[n]\} + \beta Z\{x_2[n]\} \quad (15)$$

Deslocamento no tempo O deslocamento no tempo do sinal por um valor k para a direita resulta na multiplicação da transformada Z do sinal por z^{-k} .

$$Z\{x[n-k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n} \quad (16)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]z^{-l-k} \quad (17)$$

$$= z^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]z^{-l} \quad (18)$$

$$= z^{-k}Z\{x[n]\} \quad (19)$$

Convolução A transformada Z da convolução de dois sinais é o produto das transformadas Z dos dois sinais.

$$Z\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] * y[n]z^{-n} \quad (20)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]y[n-l] \right) z^{-n} \quad (21)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[l]y[n-l]z^{-n} \quad (22)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-l]z^{-n} \quad (23)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]z^{-l}Z\{y[n]\} \quad (24)$$

$$= Z\{y[n]\} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]z^{-l} \quad (25)$$

$$= Z\{y[n]\}Z\{x[n]\} \quad (26)$$

Diferenciação

$$Z\{nx[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \quad (27)$$

$$= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{dz^{-n}}{dz} \quad (28)$$

$$= -z \frac{d(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n})}{dz} \quad (29)$$

$$= -z \frac{d(Z\{x[n]\})}{dz} \quad (30)$$

0.1.6 Região de Convergência

A região de convergência (ROC) é a região no plano complexo na qual o somatório utilizado na definição da transformada Z assume um valor finito.

$$ROC = \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty\} \quad (31)$$

0.1.7 Resposta ao Impulso

Para obtermos a resposta ao Impulso de um filtro, basta, para tanto, fazer o sinal de entrada igual ao impulso, $x[n] = \delta[n]$ ³.

Filtro FIR

Para um filtro não-recursivo (FIR) de ordem P , teremos a seguinte resposta ao impulso:

$$h(n) = \sum_{i=0}^P b_i \delta[n - i] \quad (32)$$

Como vimos anteriormente nas propriedades da transformada Z, a convolução de dois sinais discretos equivale, no domínio da transformada Z, a multiplicar a transformada dos dois sinais. Como o processo de filtragem nada mais é que a convolução do sinal de entrada com a resposta ao impulso do filtro, é interessante obtermos a transformada Z da resposta ao impulso. Poderemos assim realizar a filtragem no domínio Z através de uma simples operação de multiplicação. A transformada Z de $h[n]$ é dada então por:

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (33)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^P b_i \delta[n - i] z^{-n} \quad (34)$$

$$= \sum_{i=0}^P b_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - i] z^{-n} \quad (35)$$

$$= \sum_{i=0}^P b_i Z\{\delta[n - i]\} \quad (36)$$

$$= \sum_{i=0}^P b_i z^{-i} \quad (37)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{P-i}}{z^P} \quad (38)$$

³A função delta é definida por $\delta[n] =$

O critério de estabilidade BIBI⁴ requer que todos os pólos da função de transferência estejam dentro do círculo unitário (valor absoluto menor do que um) para que o sistema seja estável. Como os filtros FIR de ordem P possuem todos os P pólos em $z = 0$, todos eles estão dentro do círculo unitário e portanto todos os filtros FIR são estáveis.

Filtro IIR

Realizaremos o mesmo procedimento acima para determinar a resposta ao impulso de filtros IIR. A entrada do filtro será $x[n] = \delta[n]$ e a saída (resposta ao impulso) será $y[n] = h[n]$. Teremos então:

$$h[n] = \sum_{i=0}^P b_i x[n-i] + \sum_{k=0}^Q a_k h[n-k] \quad (39)$$

A transformada Z da resposta ao impulso é dada abaixo:

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (40)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^P b_i \delta[n-i]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^Q a_k h[n-k]z^{-n} \quad (41)$$

$$= \sum_{i=0}^P b_i z^{-i} + \sum_{k=0}^Q a_k z^{-k} H(z) \quad (42)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=0}^Q a_k z^{-k}} \quad (43)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{O-i}}{z^O - \sum_{k=0}^Q a_k z^{O-k}} \quad (44)$$

onde escolhemos $O = \max(P, Q)$.

Os pólos de $H(z)$ são dados por

$$z^O - \sum_{k=0}^Q a_k z^{O-k} = 0 \quad (45)$$

Todos os pólos de $H(z)$ só estarão na origem se todos os a_k forem nulos. Mais uma vez, para garantir a estabilidade é necessário que os pólos estejam dentro do círculo unitário.

0.1.8 Resposta em Frequência

Para determinar a resposta em frequência de um filtro vamos utilizar como entrada um sinal de uma única frequência, $x[n] = e^{jn\omega}$. Aplicando esta entrada

⁴BIBO : bounded input, bounded output

ao filtro FIR teremos a seguinte saída:

$$y[n] = \sum_{i=0}^P b_i e^{j(n-i)\omega} \quad (46)$$

$$= e^{jn\omega} \sum_{i=0}^P b_i e^{-ji\omega} \quad (47)$$

$$= x[n] \sum_{i=0}^P b_i e^{-ji\omega} \quad (48)$$

$$H(\omega) = \frac{y[n]}{x[n]} \Big|_{x[n]=e^{jn\omega}} = \sum_{i=0}^P b_i e^{-ji\omega} \quad (49)$$

Exemplo: Filtro Média Móvel

Vamos exemplificar o item anterior para o caso de um filtro média móvel. O filtro em questão é um filtro de segunda ordem, sendo ambos os coeficientes iguais a $1/2$, $b_0 = b_1 = \frac{1}{2}$.

Podemos simplesmente utilizar a fórmula 49 para determinar a resposta em frequência do filtro média móvel.

$$H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} \quad (50)$$

Colocando o fator $e^{-j\omega/2}$ em evidência, teremos

$$H(\omega) = \frac{1}{2} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega/2} \quad (51)$$

Este, por sua vez, pode ser separado em magnitude, $|H(\omega)|$, e fase, $\angle H(\omega)$, $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$.

$$|H(\omega)| = \cos\frac{\omega}{2} \quad \text{e} \quad \angle H(\omega) = -\frac{\omega}{2} \quad (52)$$