

# Sólitons em Comunicações Ópticas

Guilherme Parreira (guiparreira@ig.com.br) e Leonardo Araujo (leoca@cefala.org)  
UFMG — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil

22 de Janeiro de 2004

## 1 Introdução: uma visão histórica

Os sólitons, são um tipo específico de ondas solitárias (solitary waves). Ambos obtiveram muita atenção nos últimos trinta anos e aparecem em diversas áreas, tais como ondas em águas rasas e profundas, comunicações ópticas, condensadores de Bose-Einstein e modelos biológicos. As ondas solitárias são ondas que mantêm a sua forma quase inalterada a medida que se propagam, devido a baixa atenuação e dispersão que sofrem. Tipicamente surgem de alguns tipos de equações diferenciais parciais. Os sólitons, mas especificamente, são ondas solitárias que interagem inelásticamente, ou seja, preservam a sua forma em colisões.

O primeiro relato de observação de uma onda solitária data de 1834, quando então um engenheiro náutico, J. Scott Russel observou no canal, que vai de Edinburgo a Glasgow nas Escócia, uma onda se propagando nas superfície da água sem se atenuar. Russell relatou tal observação em um jornal da Associação Britânica em 1844.

"Acredito poder melhor introduzir o fenômeno descrevendo as circunstâncias em que se procederam o meu primeiro contato com ele. Eu estava observando o movimento de um barco que foi rapidamente retirado do canal por um par de cavalos, quando o barco parou de repente - mas não a massa de água do canal que este havia colocado em movimento; ela se acumulou ao redor da proa da embarcação em estado de agitação violenta, e então subitamente, deixando-o para trás, deslizou com grande velocidade, assumindo a forma de uma

grande onda solitária, uma elevação arredondada, suave e com um pico bem definido, que continuou o seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudar de forma ou diminuir a velocidade. Eu segui montado no cavalo, e alcancei-o ainda viajando a umas oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma a uns trinta pés de distância. Sua altura diminuiu gradativamente, e após uma perseguição de uma ou duas milhas perdeu-o numa das sinuosidades do canal."

Esse fenômeno inspirou Russell o que o levou a fazer experimentos para provar a existências dessas ondas e estudá-las. Para tanto ele utilizou um canal de água raso e longo, onde ele podia jogar pesos. Como esses experimentos ele fez duas descobertas:

- A existência de ondas solitárias, isto é, ondas longas de águas rasas e de forma permanente.
- Para essas ondas a velocidade da onda  $v$  seria dada por:  $v = \sqrt{g(h + \eta)}$ , onde  $\eta$  é a amplitude da onda medida do plano da água,  $h$  é a profundidade do canal e  $g$  é a medida da gravidade (note que  $\eta/h < 1$  no experimento de Russel).

No entanto Russel percebeu que não existia uma teoria matemática que explicasse e assim desse suporte aos seus resultados, que não foram então aceitos por todos os membros da comunidade matemática. Não existia na época nenhuma equação que descrevesse ondas em água e, por tanto, o que ele propunha era uma solução para uma equação desconhecida. Airy publicou em 1845 uma teoria de ondas longas no seu livro "Ondas e Correntes"(Tides

and Waves), onde ele encontra uma fórmula para a velocidade de uma onda relacionando sua altura e amplitude. Desse resultado, Airy concluiu que as ondas solitárias não poderiam existir. Isso levou a um confronto entre Russell e Airy que finalmente teve fim em 1895 com a equação de Korteweg e de Vries que descreve ondas em águas rasas. Para tal equação foi provada matematicamente a existência de uma solução na forma de onda solitária. Esse resultado ficou enterrado por aproximadamente sessenta anos quando foi redescoberto em um contexto totalmente diferente.

## 2 A equação de Korteweg-de Vries (KdV)

A equação de Korteweg-de Vries (KdV) é uma equação diferencial parcial não-linear de terceira ordem que foi inicialmente formulada para explicar a propagação de ondas em um canal de águas rasas. Posteriormente foi verificado que tal equação estava também envolvida com uma grande variedade de problemas relacionados a fenômenos físicos, principalmente aqueles aonde há a existência de ondas de choque, ondas viajantes e sólitos. Alguns fenômenos físicos da mecânica quântica podem ser explicados através de modelos baseados na equação de KdV. Além disso essa equação é também utilizada na dinâmica de fluidos, aerodinâmica, e mecânica contínua como um modelo para formação de ondas de choque, sólitos, turbulência, comportamento de camadas de contorno e transporte de massa. Várias soluções de forma fechada, soluções de aproximações por séries e soluções numéricas são conhecidas, para casos particulares de condições de contorno e condições iniciais.

Após aplicar uma transformada de Galileu (Galilean Transform) <sup>1</sup> e aplicando uma série de transformações de escala, a equação de KdV pode ser

<sup>1</sup>Uma transformação de um quadro de referência para um outro em movimento a velocidade constante. No entanto, a relatividade espacial mostra que a transformação tem que ser modificada para a transformação de Lorentz para movimentos relativísticos. Para mais detalhes veja: <http://mathworld.wolfram.com/GalileanTransformation.html>

escrita da seguinte forma:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx}$$

onde  $u_x$  é a derivada primeira de  $u$  em relação a  $x$ ,  $u_{xx}$  a derivada segunda,  $u_{xxx}$  a derivada terceira e  $u_t$  é a derivada de  $u$  em relação a  $t$ .

Uma solução para a equação de KdV é da forma:

$$u(x, t) = -2\operatorname{sech}^2(x - 4t)$$

genericamente a solução é:

$$u(x, t) = -x_{max}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{x_{max}}{2}}(x - 2x_{max}t)\right)$$

A solução que obtemos é uma onda viajante da seguinte forma:

$$u(x, t) = \varphi(\xi), \xi = x + ct$$

Esta solução é obtida restringindo a equação às seguintes condições de contorno:

$$u, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \rightarrow \infty$$

Essas condições nos levam a equação de Riccati:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = b + a\varphi - 2\varphi^3$$

que pode ser resolvida explicitamente, obtendo assim a solução mostrada anteriormente.

Esta solução pode ser visualizada no gráfico da Figura 1 ou 2 para o caso particular em que  $x_{max} = 2$ .

Para o caso em que consideramos a solução dada anteriormente como a solução para o uma canal de águas rasas, teremos que quanto mais profundo for o canal, mais rápida a onda (dada pela solução anterior da equação de KdV) se moverá e mais estreita será.

Ondas solitárias não são incomuns na natureza. O que é mais chama a atenção é que as ondas solitárias resultantes da equação de KdV podem colidir, passar uma através da outra e recuperar completamente a forma original após a colisão. As ondas solitárias desse tipo são chamadas sólitos.

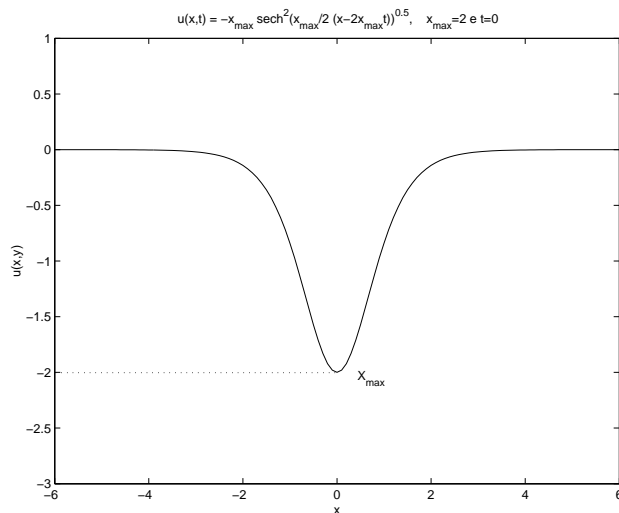


Figura 1: Uma solução para a equação de KdV.

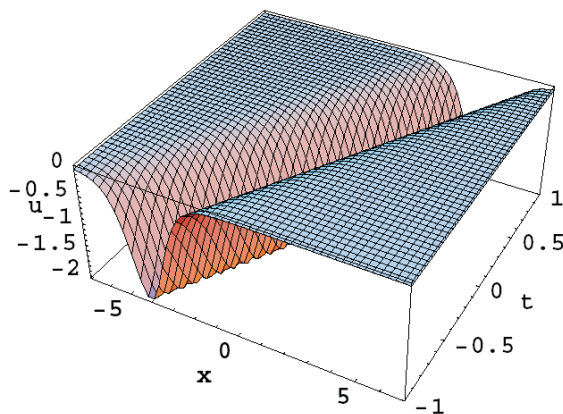


Figura 2: Gráfico da superfície da mesma solução da Figura 1.

### 3 Sólitons em Comunicações Ópticas

O primeiro caso relevante de sólitons em ópticas ocorreu relacionado com a transparência auto-induzida e foi verificado por Erwin Hahn de Berkeley e seu então aluno Sam McCall [6]. Um pulso óptico pode atravessar um meio de dois níveis de material absorvente. Se o relaxamento do meio for muito maior do que o pulso, então o pulso pode passar sem sofrer absorção do meio. A fronteira da frente do pulso é absorvida pelo meio que é invertido. Com o retorno ao nível zero o meio re-irradia e a energia total do pulso óptico é recuperada. Hahn fez vários estudos computacionais sobre o fenômeno e a partir desses estudos surgiu o carácter sóliton do problema: pulsos podem colidir-se e recuperarem-se após a colisão. Quase ao mesmo tempo uma teoria analítica se desenvolveu, baseada nos métodos de espalhamento reverso, graças aos esforços de Kruskal [?, ?, ?]. Brevemente explicado, o método do espalhamento inverso mapeia a solução da equação diferencial parcial não linear em soluções de equações diferenciais lineares. A equação linear pode ser solucionada por métodos comuns. A transformação de volta a uma solução da equação não linear com condições iniciais arbitrárias.

### 4 Características não lineares das fibras

Uma onda de luz viajando em uma fibra também sofre a ação de respostas não lineares. Mesmo que as respostas não lineares sejam fracas, após uma longa distância de propagação (em termos do comprimento de onda) o seu efeito passa a ser significativo. Os efeitos não lineares de maior importância são o efeito Kerr e os espalhamentos de Brillouin e Raman.

#### 4.1 Efeito Kerr

A origem das respostas não lineares é o movimento não harmônico dos elétrons de superfície sob a influência de um campo aplicado. Como resultado, a amplitude da polarização induzida  $P$  dos dipólos elétricos não é linear no campo elétrico  $E$ , mas envolve termos de mais alta ordem:

$$P = \varepsilon_0[\chi^{(1)} \cdot E + \chi^{(2)} : EE + \chi^{(3)} : EEE + \dots]$$

onde  $\varepsilon_0$  é a permissividade do vácuo e  $\chi^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) é a susceptibilidade de  $j$ -ésima ordem. Para considerar os efeitos de polarização da luz,  $\chi^{(j)}$  é um tensor de posto  $j + 1$ . A susceptibilidade linear  $\chi^{(1)}$  fornece o índice de refração linear  $n_0$  e o coeficiente de atenuação  $\gamma$ . Em meios cristalinos tal como nas fibras ópticas praticamente não existe geração de segundo harmônico pois a susceptibilidade  $\chi^{(2)}$  é nula ou bem próxima de zero. Para o caso do  $SiO_2$  que possui uma inversão simétrica a nível molecular a susceptibilidade de segunda ordem é ínfima, a menos que  $SiO_2$  contenha efeitos ressonantes. Como resultado as fibras ópticas não exibem efeitos não lineares de segunda ordem, embora o momento de quadripolo elétrico e o momento de dipolo magnético possam gerar efeitos não lineares de segunda ordem fracos. O termo de mais baixa ordem considerado são os efeitos não lineares gerado pelas susceptibilidade de terceira ordem,  $\chi^{(3)}$ .

Se considerarmos uma onda plana óptica com campo elétrico da seguinte forma:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

então a polarização induzida será dada por:

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t - kz) + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos^3(\omega t - kz)$$

Sabemos que:

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos \theta)$$

Então:

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t - kz) + \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos(\omega t - kz) + \varepsilon_0 \frac{\chi^{(3)}}{4} E_0^3 \cos 3(\omega t - kz)$$

O segundo termo corresponde a parcela gerada pelo terceiro harmônico, que pode ser desprezada para o caso de fibras ópticas devido ao descasamento entre as frequências  $\omega$  e  $3\omega$ . A polarização fica então reduzida a:

$$P = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E_0^2 \right) E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Para uma onda plana como a proposta anteriormente, a intensidade é dada por:

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_0 E_0^2$$

onde  $n_0$  é o índice de refração da fibra quando o campo aplicado é de baixa intensidade. Neste caso, podemos então reescrever a equação da polarização:

$$P = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} + \frac{3}{2} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0} I \right) E_0 \cos(\omega t - kz)$$

A relação geral entre polarização e o índice de refração é dada por:

$$P = \varepsilon_0 (n^2 - 1) E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Comparando as duas equações que descrevem a polarização, veremos que o termo não linear contendo  $\chi^{(3)}$  leva a um índice de refração dependente da intensidade:

$$n^2 = 1 + \chi^{(1)} + \frac{3}{2} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0} I$$

Como o último termo é geralmente muito pequeno para intensidade de luz muito alta, podemos aproximar por uma série de Taylor:

$$n \simeq n_0 + \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0^2} I$$

$$n = n_0 + n_2 I$$

$$n_0^2 = 1 + \chi^{(1)}$$

$$n_2 = \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{c \varepsilon_0 n_0^2}$$

onde

e

O índice de refração não linear  $n_2$  é chamado de coeficiente Kerr. Para a sílica o seu valor é de aproximadamente  $1.3 \times 10^{-22} m^2/V^2$ . Como o efeito Kerr se origina de movimentos não harmônicos dos elétrons da fronteira nas moléculas, eles tem resposta da ordem de  $10^{-15}$ .

## 4.2 Efeito Raman

O espalhamento estimulado de Raman é uma interação entre a onda luminosa e os modos de vibração das moléculas de sílica. Se um fóton com uma energia  $h\omega_1$  é incidente a uma molécula com frequência de vibração  $\omega_m$ , a molécula pode absorver parte da energia do fóton, excitando a ressonância. Na interação, o fóton espalhado perde energia, ficando agora com uma energia  $h\omega_2$  mais baixa e conseqüentemente uma frequência mais baixa. Essa nova frequência  $\omega_2$  é conhecida como frequência de Stokes e o fóton correspondente como fóton de Stokes. Tal processo é conhecido como espalhamento de Raman. Este espalhamento, ao contrário do espalhamento de Rayleigh, é inelástico, o fóton perde a energia de uma quantidade de  $h\omega_R = h\omega_1 - h\omega_2$  embora o número de fótons não varie.

Em uma fibra quem mais contribui para a ressonância é fóton óptico de frequência aproximadamente  $10^{13} Hz$ . Como o fóton óptico tem um momento muito pequeno ( $k_R \simeq 0$ ), a luz que sofre espalhamento se propaga a uma velocidade igual a  $v_g$  avaliada em  $\omega_2$  na mesma direção que a luz incidente. Quando a frequência de batimento entre a onda incidente e a onda espalhada reforçar o fóton óptico, o processo de espalhamento é estimulado e a amplitude da luz espalhada cresce exponencialmente na direção de propagação da onda. Tal processo é conhecido como espalhamento de Raman estimulado (ERE).

Para um onda bomba (pump wave) com intensidade  $I_p$ , a intensidade de Stokes  $I_S$  cresce em  $z$ , a direção de propagação, segundo:

$$\frac{dI_S}{dz} = g_R I_p I_S$$

onde  $g_R$  é conhecido como coeficiente de ganho Raman.  $g_R$  depende da frequência de separação entre a onda bomba e a onda do modo Stokes;  $g_R = 0$  quando a separação em frequência é nula e aumenta com a separação de frequências. Na sílica, uma onda bomba de  $1 \mu m$ ,  $g_R$  tem valor de pico de aproximadamente  $1 \times 10^{-11} cm/W$  e a frequência de separação da onda Stokes para a onda bomba é de  $13 THz$ .

Quando um pulso curto tal como um sóliton se propaga na fibra, a frequência da portadora pode servir como uma bomba e excitar a banda inferior adjacente do espectro. Como resultado, a frequência da portadora decresce. Esse processo é representado por  $\sigma_R$ , sendo este proporcional a  $dg_R/d\Delta\omega$ , onde  $\Delta\omega$  é a diferença de frequência entre a onda bomba e a onda Stokes.

## 4.3 Efeito Brillouin

Além da excitação das ressonâncias, o material da fibra admite excitação de ondas acústicas, que são chamadas na mecânica quântica de phonons. Como a onda acústica se propaga a uma velocidade  $v_a$  muito inferior à velocidade da luz  $c$ , ela possui um momento muito maior  $hk_a$ , onde

$$k_p = \frac{\omega_a}{v_a}$$

e as condições de ressonância requerem que

$$\omega_a = \omega_0 - \omega_s \simeq \frac{(k_0 - k_s) \cdot c}{n_0}$$

onde  $\omega_a$  é a frequência do phonon,  $\omega_s$  é a frequência de Stokes, e  $k_0$  e  $k_s$  são os vetores de onda dos modos bomba e Stokes. Temos que  $|v_a| \ll |c|$ , a condição de casamento do número de onda é satisfeita tomando-se:

$$k_s \simeq -k_0$$

isto é, requerindo que o modo Stokes (onda espalhada) se propague na direção oposta a onda bomba.

O espalhamento de uma onda de luz causado por uma onda acústica é chamado de espalhamento de

Brillouin. A partir das considerações acima, notamos que, enquanto o espalhamento Raman é um espalhamento na direção da direção de propagação, o espalhamento de Brillouin é um espalhamento na direção oposta à onda incidente (onda bomba). Se a onda bomba é cw de tal maneira que a onda Stokes possa continuamente coexistir com a onda bomba, a frequência de batimento entre as duas induz continuamente a excitação da onda acústica, e o processo cresce exponencialmente. Tal processo é conhecido como espalhamento Brillouin estimulado (EBE). Para o espalhamento Brillouin estimulado, a intensidade do modo Stokes  $I_s$  cresce exponencialmente com a intensidade do bomba  $I_p$ , da seguinte forma:

$$\frac{dI_s}{dz} = g_B I_p I_s$$

onde  $g_B$  é o ganho de Brillouin. Em oposição ao espalhamento estimulado de Raman, o espectro do ganho de Brillouin é extremamente estreito com largura de banda de aproximadamente  $10\text{MHz}$ . O valor de pico do ganho de Brillouin ocorre no deslocamento de Stokes,  $\omega_0 - \omega_S$ , de aproximadamente  $10\text{GHz}$  e alcança o valor de  $g_B$  de aproximadamente  $6 \times 10^{-9}\text{cm/W}$ .

## Referências

- [1] Fordy, A.P., A Historical Introduction to Solitons and Bäcklund Transformations
- [2] Haus, Herman A., Optical Fiber Solitons, Their Properties and Uses
- [3] Horne, Rudy L., A (Very) Brief Introduction to Soliton Theory in a class of Nonlinear PDEs
- [4] Hasegawa, Akira e Kodama, Yuji, Solitons in Optical Communications
- [5] Livro do Odilon
- [6] Self-Induced Transparency, Phys. Rev., vol. 183, pp. 457-485, 1969
- [7] Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett., vol.19, pp. 1095-1097, 1967