

# Wavelets

Leonardo Carneiro de Araújo

9 de agosto de 2006

*“To see a world in a grain of sand  
and heaven in a wild flower  
Hold infinity in the palms of your hand  
and eternity in an hour”  
(William Blake)*

## 1 Introdução

“Nos últimos anos, alguns de matemáticos acostumados à abstração da pesquisa pura têm sujado suas mãos – com entusiasmo – em uma surpreendente gama de projetos práticos. O que essas tarefas díspares possuem em comum é uma nova linguagem matemática, o seu alfabeto consistindo-se de ondulações chamadas wavelets, apropriadamente estiradas, comprimidas ou deslocadas.

Uma variedade de informações – sua voz, sua impressão digital, uma fotografia, uma raio-x pedido pelo médico, sinais de rádio do espaço sideral, ondas sísmicas – podem ser traduzidas nesta nova linguagem, que emergiu independentemente em diversas áreas; na verdade, apenas recentemente foram entendidas como uma mesma linguagem. Em vários casos, essa transformação em wavelets torna-o mais fácil de ser transmitido, comprimido e analisado ou de se extrair informações apesar do ‘ruído’ envolvente – e até mesmo a fazer cálculos mais rápidos.”

(Prologue - The World According to Wavelets, Barbara Burke Hubbard)

Como veremos aqui, as funções wavelets surgem como uma nova forma de ver o mundo, onde as representações são feitas em diferentes escalas e pode-se escolher a relação de compromisso desejada entre a resolução temporal e em frequência. Com a transformada wavelet podemos escolher dentre várias formas de representação no domínio tempo-frequência. Os diferentes níveis de detalhes em cada representação constituem informações contidas em diferentes bandas de frequências, de forma que a análise em resoluções múltiplas é uma forma de seccionar o espaço em diversas faixas de frequências não sobrepostas. É

possível assim segregar informações de diferentes faixas espectrais. Todas essas propriedades da análise wavelet nascem naturalmente decorrente da relação de escala que satisfazem.

Uma contribuição das wavelets, como disse Farge, é que elas “forçam as pessoas a pensarem sobre o que realmente é a transformada de Fourier, forçamos a pensar que quando escolhemos um tipo de análise estamos na verdade misturando o sinal e as funções utilizadas na análise. Geralmente, quando se usa a mesma técnica por várias gerações científicas, tornamo-nos cegos a elas. Uma nova ferramenta como as wavelets forçam-nos a reconsiderar o problema desde o seu princípio.”

As wavelets são um produto da colaboração de várias áreas, desde a matemática e física puras, até engenharia e processamento de sinais. Várias pesquisas independentes nessas áreas buscavam objetivos semelhantes, mas utilizavam abordagens diferentes. Buscavam novas formas de representar sinais no domínio tempo-frequência. As diversas linhas de pesquisa convergiram para um ponto no final da década de 80, sendo então formalizada a teoria de wavelets. A unificação de todos os pensamentos tornou-se um fator primordial para a subsequente popularidade das wavelets, impulsionando assim novas pesquisas na área.

A teoria é muito extensa, não sendo possível em um único texto fornecer todas as informações. Diversos livros existem sobre wavelets e suas aplicações, e muito mais ainda textos de conferências e jornais. A maioria dos textos é dedicada a um público que já possua algum conhecimento sobre o assunto e mesmo os textos introdutórios assumem uma maturidade e dedicação do leitor.

Wavelets são úteis em diversas aplicações, como análise e reconstrução de sons (18), e levou ao desenvolvimento de um novo algoritmo, com várias características atrativas, de decomposição da informação do sinal visual (20). Análise de sinais sísmicos, sinais biomédicos, modelagem geométrica, reconhecimento e síntese de fala, redução de ruído e compressão, são apenas algumas das aplicações para as wavelets.

## 2 Definição

As funções wavelets ( $\psi$ ) fornecem uma base para o espaço vetorial das funções cujo quadrado é integrável ( $L^2(\mathbf{R})$ )<sup>1</sup>. Tais funções devem satisfazer uma relação de translação e escala dada por

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Um espaço  $L^2$  é um conjunto de funções cujo quadrado é integrável em um espaço de medida  $X$ . Juntamente com o produto interno definido em  $L^2$  em relação a uma medida  $\mu$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu,$$

o espaço  $L^2$  forma um espaço de Hilbert.

onde a função  $\psi$  é dilatada por um fator  $s$  e transladada de  $u$ . Além disso, as funções wavelets devem possuir momento de ordem zero nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 . \quad (2)$$

Note que o fator de normalização  $|s|^{\frac{1}{2}}$  é escolhido de forma que  $\|\psi_{s,u}\| = \|\psi\|$  para todo  $s$  e  $u$ . Iremos então assumir  $\|\psi\| = 1$ . A função  $\psi$  é chamada “wavelet mãe”, pois é a partir dela que é gerada uma família de wavelets, através da transformação dada na equação (1).

As funções wavelets possuem suporte compacto<sup>2</sup>, ou decaem exponencialmente a zero quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Isto significa que as wavelets são funções que possuem uma boa localização no tempo, contribuem localmente na análise de funções, ao contrário do que ocorre nas funções de base da análise de Fourier (seno e cosseno), que são não nulas em todo intervalo de definição, e por tanto contribuem globalmente.

Queremos que a família de funções  $\{\psi_{s,u}\}$  forme um sistema ortonormal completo para o subespaço  $L^2(\mathbf{R})$ , isto significa que uma função qualquer  $f \in L^2(\mathbf{R})$  pode ser representada em termos das funções  $\psi_{s,u}$ . Dependendo da aplicação, podemos escolher diferentes famílias de wavelets. Podemos, por exemplo, escolher parâmetros  $s$  e  $u$  que variem continuamente em  $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ , onde  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . A função  $f$  pode então ser representada por  $Wf$

$$W_c f(s, u) = \langle \psi_{s,u}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad (3)$$

correlacionando  $f$  com o átomo wavelet  $W_c f$ .

Se  $\psi$  satisfizer a seguinte condição

$$\int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty , \quad (4)$$

onde  $\widehat{\psi}$  é a transformada de Fourier de  $\psi$ ,

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) e^{j\omega t} dt , \quad (5)$$

$W_c$  é então uma isometria<sup>3</sup> de  $L^2(\mathbf{R})$  em  $L^2(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R})$ . O mapeamento  $W_c$  é chamado “transformada contínua de wavelet” (12), (13), (14). Nesta formulação, a transformada contínua de wavelet é semelhante à “representação de estado coerente afim” da mecânica quântica (2), (24). A equação (4) é chamada condição

<sup>2</sup>O suporte da função, intervalo em que esta assume valores diferentes de zero, é um conjunto compacto. Um subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $X$  será compacto quando qualquer recobrimento aberto de  $S$  admite um subrecobrimento finito de  $S$ . Um suporte compacto nos interessa apenas quando o domínio for limitado.

<sup>3</sup>Isometria é um mapeamento bijetivo entre dois espaços métricos que preserva as distâncias. Seja  $T$  o mapeamento e  $d(\cdot, \cdot)$  a função de distância, então  $d(T(f), T(g)) = d(f, g)$ . Isometrias são as vezes chamadas de Transformações Congruentes.

de admissibilidade. Uma primeira vista sobre esta revela que  $\psi$  deve ser tal que  $\widehat{\psi}(0) = 0$ , ou, equivalentemente,  $\int \psi(t)dt = 0$  ( $\psi$  possui momento de ordem zero nulo). Por razões práticas, podemos considerar que  $\psi$  decai suficientemente por tanto, a condição (4) torna-se equivalente a escolher  $\psi$  com momento de ordem zero nulo (2).

Para outras aplicações, incluindo análise de sinais, gostaríamos de restringir os valores dos parâmetros  $s$  e  $u$  em (1) a um subconjunto discreto. Podemos então fixar o passo de dilatação  $s_0 > 1$ , e o passo de translação  $u_0 \neq 0$ . A família de wavelets fica então, para  $j, k \in \mathbf{Z}$ ,

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j}t - ku_0) , \quad (6)$$

o que corresponde a escolher  $s = s_0^j$  e  $u = ku_0 s_0^j$ , o que mostra que o parâmetro de translação  $u$  depende do parâmetro de dilatação  $s$ . Para valores grandes de  $j$ , o fator de dilatação é grande e conseqüentemente a função  $\psi_{j,\cdot}$  torna-se bastante espalhada e o passo de translação torna-se subseqüentemente menor ( $u_0 s_0^j$ ), adaptando-se ao novo tamanho da função dilatada. Para valores de  $j$  negativos ocorre o oposto, a função  $\psi_{j,\cdot}$  fica bem concentrada e o passo de translação torna-se menor.

A transformada de wavelet discreta ( $W_d$ ) está associada a wavelet discreta em (6). Ela mapeia uma função  $f$  em uma seqüência indexada em  $\mathbf{Z}^2$ ,

$$(W_d f)_{j,k} = \langle \psi_{j,k}, f \rangle = s_0^{-j/2} \int f(t) \psi^*(s_0^{-j}t - ku_0) dt \quad (7)$$

Se  $\psi$  for admissível (satisfizer uma condição semelhante à condição (4), já que agora estamos tratando do caso discreto), e  $\psi$  possuir um decaimento suficiente, então  $W_d$  é um mapeamento de  $L^2(\mathbf{R})$  em  $l^2(\mathbf{Z})$ . Em geral,  $W_d$  não possui uma inversa limitada em todo domínio, mas se tiver, isto é, se para algum  $A > 0$ ,  $B < \infty$ ,

$$A \|f\|^2 < \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle \psi_{j,k}, f \rangle|^2 < B \|f\|^2 , \quad (8)$$

para todo  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , então o conjunto  $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbf{Z}\}$  é chamado de *frame*. Nesta situação é possível construir algoritmos numéricos estáveis para reconstruir  $f$  a partir de seus coeficientes wavelet  $\langle \psi_{j,k}, f \rangle$ . Em particular,

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle \psi_{j,k}, f \rangle \psi_{j,k} + R \quad (9)$$

onde o resto  $R$  é tal que

$$\|R\| \leq O\left(\frac{B}{A} - 1\right) \|f\| . \quad (10)$$

Para frames em que  $A = B$ , chamados fraimes estreitos, um resto  $R = 0$ . Para valores de  $A$  e  $B$  tais que  $B/A$  está próximo de 1, o termo de erro poderá ser omitido, este é o caso de decomposição e reconstrução de sinais musicais e outros sons, como feito por A. Grossmann, R. Kronland e J. Morlet (18).

Se os  $\psi_{j,k}$  são normalizados ( $\|\psi_{j,k}\| = 1$ ), a redundância é medida pelos limites do frame  $A$  e  $B$ . Quando os vetores do frame forem linearmente independentes teremos  $A \leq 1 \leq B$ . Neste caso o erro só será nulo quando a igualdade for válida, ou seja, quando os vetores do frame forem ortonormais.

### 3 Medida Tempo-Freqüência

Dado um sinal  $f(t)$  (vamos considerar  $t$  uma variável contínua), em várias aplicações, estamos interessados no seu conteúdo em freqüência e, ainda mais, na sua localização no tempo. Isso é similar a uma representação musical, em que as notas definem freqüências diferentes, estão localizadas em instantes de tempos diferentes e possuem durações diferentes. A transformada padrão, a de Fourier,

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (11)$$

dá uma representação em freqüência de  $f$ , mas a informação contendo a localização no tempo não pode ser vista nesta forma. Podemos obter uma localização temporal janelando o sinal  $f$ , de forma a obter apenas uma fatia bem localizada do sinal  $f$ , e posteriormente aplicando a transformada de Fourier

$$(T^{win}f)(\omega, t) = \int f(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt. \quad (12)$$

Esta é a transformada de Fourier com janela, a forma mais tradicional de análise tempo-freqüência. A forma mais usual deste tipo de análise é versão discreta desta, aquela na qual os parâmetros  $\tau$  e  $\omega$  são regularmente espaçados da forma:  $\tau = n\tau_0$  e  $\omega = m\omega_0$ , onde  $m$  e  $n$  pertencem a  $\mathbf{Z}$ , e  $\omega_0, \tau_0 > 0$  são fixos. A equação (12) fica então na forma

$$(T_{m,n}^{win}f)(\omega, t) = \int f(t)g(t - n\tau_0)e^{-jm\omega_0 t} dt. \quad (13)$$

Para valores de  $n$  fixos,  $T_{m,n}^{win}(f)$  corresponde aos coeficientes de Fourier de  $f(\cdot)g(\cdot - n\tau_0)$ . Se  $g$  possuir suporte compacto, então, uma escolha apropriada de  $\omega_0$  garante que os coeficientes de Fourier  $T_{m,n}^{win}(f)$  são suficientes para caracterizar e, se necessário, reconstruir  $f(\cdot)g(\cdot - n\tau_0)$ . Mudanças em  $n$  acarretam deslocamentos de  $\tau_0$  na fatia de  $f$  que se está considerando, é possível então reconstruir toda o sinal  $f$  a partir de  $T_{m,n}^{win}(f)$ .

As transformadas wavelet descritas nas equações (3) e (7) (contínua e discreta) fornecem uma representação tempo-freqüência similar aquela fornecida pelas equações (12) e (13), respectivamente. Note que, em ambos os casos, representados nas equações (3) e (12), toma-se o produto interno entre  $f$  e uma família de funções,  $\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-u}{s})$  em (3) e  $g_{\omega,\tau}(t) = g(t - \tau)e^{j\omega t}$  em (12).

A transformada de Fourier, como definida na equação (5), correlaciona  $f$  com  $\psi_{s,u}$ . Utilizando o teorema de Parseval (veja appendice (A)) podemos escrever

a integral no tempo como uma integral na frequência.

$$W_c f(s, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s,u}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{s,u}^*(\omega) d\omega \quad (14)$$

Assim como a transformada de Fourier janelada, a transformada wavelet é capaz de medir as variações no domínio do tempo-frequência dos componentes espectrais de um sinal, mas a resolução tempo-frequência é diferente.

Os coeficientes wavelet  $W_c f(s, u)$  dependem não apenas de  $f$  e  $\hat{f}(\omega)$ , mas da região tempo-frequência em que a energia da função  $\psi_{s,u}$  e  $\hat{\psi}_{s,u}$  está concentrada. As wavelets em que  $u$  estiver próximo de  $t$  terão uma maior contribuição em  $t$ .

A diferença entre a transformada wavelet e a transformada de Fourier com janela reside da forma das funções de análise  $g_{\omega,\tau}$  e  $\psi_{s,u}$ . As funções  $g_{\omega,\tau}$  consistem em envelopes deslocados no tempo de  $\tau$  e “preenchidos” por oscilações de altas frequências. Todos os envelopes descritos por  $g_{\omega,\tau}$  possuem a mesma largura. Em contraposição, as wavelets  $\psi_{s,u}$  possuem uma largura adaptável às frequências constituintes. Quando é constituída por altas frequências, a wavelet é bem estreita, já para baixas frequências a wavelet será larga. Desta forma, a transformada wavelet é superior à transformada de Fourier com janelas quando estamos interessados em analisar fenômenos de curta duração, tais como sinais transientes ou singularidades em funções.

A transformada de Fourier de  $\psi_{s,u}$ , que no tempo está deslocada de  $u$  e dilatada de  $s$ , pode ser expressa em função da transformada de  $\psi$ :

$$\hat{\psi}_{s,u}(\omega) = e^{-j\omega u} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega) \quad (15)$$

Podemos verificar pela equação acima, que uma translação no tempo de uma wavelet implica apenas na mudança de sua fase. Já uma compressão ou dilatação no domínio do tempo, implica em uma dilatação ou compressão (respectivamente), por um mesmo fator, no domínio da frequência.

O princípio da incerteza de Heisenberg estabelece que um par de variáveis observáveis não pode ser determinado com qualquer precisão desejada para ambas as variáveis. Existe um limite para o qual aumentar a precisão em uma variável implica em diminuir a precisão na outra. Este limite é estabelecido pela seguinte relação entre as variâncias das variáveis

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (16)$$

Esta relação está diretamente ligada à proporcionalidade inversa entre dilatações no tempo e na frequência. As variâncias no tempo e frequência definem caixas no plano tempo-frequência, chamadas caixas de Heisenberg (veja figura 1). É possível mostrar que o limite de 1/4 será obtido para as funções gaussianas, ou seja, a melhor relação de precisão entre o par de variáveis se dá quando escolhermos uma função gaussiana (veja o apêndice ?? para mais informações sobre o princípio de incerteza de Heisenberg).

Se desejamos analisar como a informação de uma função qualquer  $f$  está representada no plano tempo-frequência  $(t, \omega)$  quando representada através de um

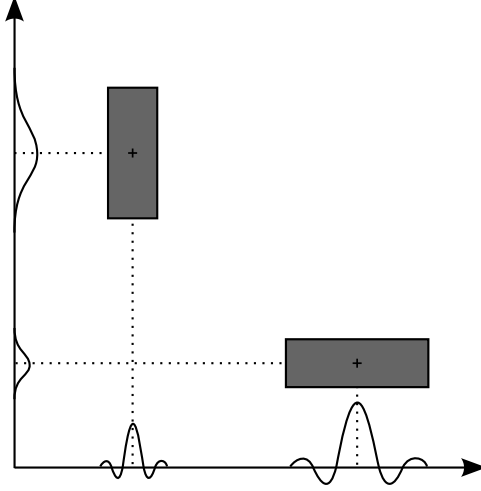


Figura 1: Caixas Tempo-Frequência.

átomo  $\phi_\gamma$ ,  $\langle f, \phi_\gamma \rangle$  devemos olhar para as caixas de Heisenberg, sendo que a localização e o tamanho de tais caixas dependem exclusivamente do espalhamento e disposição do átomo  $\phi_\gamma$  no plano tempo-frequência. Como

$$\|\phi_\gamma\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1, \quad (17)$$

onde podemos interpretar  $|\phi_\gamma(t)|^2$  como uma densidade de probabilidade centrada em

$$u_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (18)$$

O espalhamento de  $\phi_\gamma$  em torno de  $u_\gamma$  é medida pela variância

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (19)$$

Pela identidade de Plancherel (460) (veja apêndice A) podemos concluir que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\phi_\gamma\|^2$ . Desta forma, a frequência central de  $\widehat{\phi}_\gamma$  é definida por

$$\xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\widehat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega, \quad (20)$$

e o espalhamento em torno de  $\xi_\gamma$  é dado por

$$\sigma_\omega^2(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi_\gamma)^2 |\widehat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega. \quad (21)$$

A caixa de Heisenberg centrada em  $(u_\gamma, \xi_\gamma)$  e com largura de  $\sigma_t^2(\gamma)$  ao longo do eixo do tempo e  $\sigma_\omega^2(\gamma)$  ao longo do eixo das frequências representa a resolução tempo-frequência do átomo  $\phi_\gamma$ .

Considerando a transformada de Fourier, o átomo de Gabor é da seguinte forma

$$\phi_\gamma(t) = g_{\xi,u}(t) = e^{j\xi t}g(t-u), \quad (22)$$

uma função  $g$  transladada de  $u$  e modulada pela freqüência  $\xi$  (translação na freqüência). Podemos verificar que o espalhamento em torno de  $u$  e  $\xi$  são ambos independentes de  $u$  e  $\xi$ , e por tanto, o tamanho da caixa de Heisenberg para o átomo de Gabor independe de sua localização no plano tempo-freqüência.

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)|g_{u,\xi}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2|g(t)|^2 dt. \quad (23)$$

A transformada de Fourier de  $g_{u,\xi}$  é dada por

$$\widehat{g}_{u,\xi}(\omega) = \widehat{g}(\omega - \xi)e^{-ju(\omega - \xi)}. \quad (24)$$

A transformada de Fourier é também uma função simétrica e real.  $\widehat{g}_{u,\xi}$  está transladada em freqüência de  $\xi$ . O espalhamento em torno de  $\xi$  é

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 |\widehat{g}_{u,\xi}(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\widehat{g}(\omega)| d\omega. \quad (25)$$

Mostramos assim que tanto  $\sigma_t^2$ , quanto  $\sigma_\omega^2$  são independentes de  $u$  e  $\xi$ . Desta forma, para qualquer  $u$  e  $\xi$ ,  $g_{u,\xi}$  corresponde a uma caixa de Heisenberg de área  $\sigma_t\sigma_\omega$  e centrada em  $(u, \xi)$ . O tamanho da caixa é idenpendete de  $(u, \xi)$ , o que significa que a transformada de Fourier janelada (12), possui a mesma resolução no plano tempo-freqüência, as caixas de Heisenberg possuem tamanho constante, uma vez que o tamanho da largura da janela é fixo. Isso implica em uma precisão pré-determinada para o par tempo-freqüência, ditada pelo tamanho da janela escolhido. Além disso a precisão será a mesma em todos os instantes de tempo e em todas as freqüências.

Já as funções wavelets devido as dilatações geram caixas de Heisenberg de tamanhos variáveis. Diferentes escalas possuirão diferentes relações de precisão entre tempo e freqüência. Veja as figuras 2 e 3.

Podemos mostrar que a cochlea humana realiza uma análise bem semelhante à análise wavelet. Os sons incidentes são transmitidos do ouvido externo, através do meato acústico, passando pelo tímpano e em seguida pela cadeia de ossículos, que constituem o ouvido médio. A vibração mecânica é transmitida para o interior da cochlea através do contato do estribo com a janela oval. As ondas de pressão propagam-se agora no meio líquido, o interior da cochlea. Imerso nesse meio encontra-se a membrana basilar, esta possui uma rigidez e largura que variam ao longo do comprimento da cochlea, sendo mais rígida e mais estreita na base, próximo à janela oval, e menos rígida e mais larga no ápice, extremidade oposta à janela oval. Se imaginarmos a cochlea estirada, podemos introduzir uma coordenada  $y$  ao longo de seu seguimento, ou seja,  $y$  será uma coordenada que fornecerá a distância de um certo ponto na membrana basilar até a janela oval. Experimentos e simulações numéricas () mostram

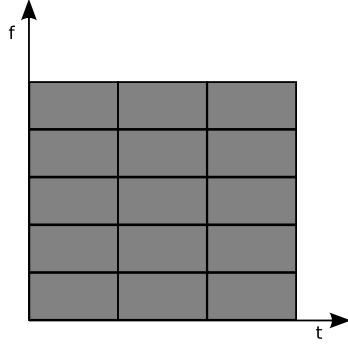


Figura 2: Caixas de Heisenber para a transformada Fourier com janela.

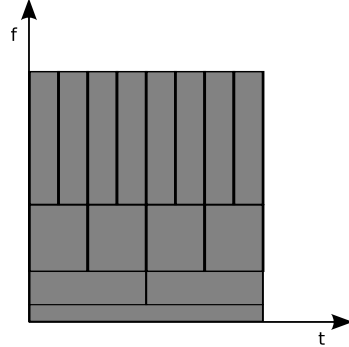


Figura 3: Caixas de Heisenber para a transformada wavelet.

que a resposta na membrana basilar a uma excitação, que seja uma onda de pressão de uma única freqüência,  $f_\omega(t) = e^{j\omega t}$ , possui a mesma freqüência no tempo, mas também um envelope em  $y$ ,  $F_\omega(t, y) = e^{j\omega t} \phi_\omega(y)$ . Sabemos que para freqüências  $\omega$  acima de  $500Hz$  podemos dizer que a freqüência varia logaritmicamente em relação à distância da janela oval, ou seja, a dependência de  $\phi_\omega(y)$  em relação a  $\omega$  corresponde a deslocamentos por fatores do tipo  $\log\omega$ . Isso quer dizer que  $\phi_\omega(y)$  é bem próximo de  $\phi(y - \log\omega)$ . Para um excitação qualquer  $f$ ,  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ , que pode ser visto como uma sobreposição das respostas elementares, onde os vetores de entrada são funções senoidais,  $e^{j\omega t}$ , e a ponderação para cada freqüência é dada por  $\hat{f}(\omega)$ . Segue então que a resposta a esta excitação qualquer,  $F(t, y)$ , será dada pela sobreposição das respostas elementares, ou seja, os vetores de entrada agora serão  $F_\omega(t, y)$  e cada freqüência será ponderada por  $\hat{f}(\omega)$ ,

$$F(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(\omega) F_\omega(t, y) d\omega \quad (26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{j\omega t} \phi_\omega(y) \hat{f}(\omega) d\omega \quad (27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{j\omega t} \phi(y - \log\omega) \hat{f}(\omega) d\omega \quad (28)$$

Fazendo a seguinte substituição  $\hat{\psi}(e^{-x}) = \sqrt{2\pi} \sqrt{|a|} \phi(x)$ , teremos

$$F(t, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|a|}} \int e^{j\omega t} \hat{\psi}(e^{-y + \log\omega}) \hat{f}(\omega) d\omega \quad (29)$$

e posteriormente,  $y = \log a$ , obtendo

$$F(t, \log a) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|a|}} \int e^{j\omega t} \hat{\psi}(e^{-\log a + \log\omega}) \hat{f}(\omega) d\omega \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{|a|}} \int e^{j\omega t} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \hat{f}(\omega) d\omega \quad (31)$$

Utilizando as seguintes propriedades da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (32)$$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \widehat{f}(\omega) e^{j\omega t_0} \quad (33)$$

juntamente com o teorema de Parseval (459), teremos:

$$F(t, \log a) = \sqrt{|a|} \int f(t') \psi(a(t' + t)) dt' \quad (34)$$

Substituindo agora  $F(t, \log a)$  por  $G(a, t)$ ,

$$G(a, t) = \sqrt{|a|} \int f(t') \psi(a(t' + t)) dt' \quad (35)$$

Escolhendo  $a = 1/s$ ,  $t = -u$  e como é necessário que  $a > 0$ ,

$$G(s, u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int f(t) \psi\left(\frac{t - u}{s}\right) dt \quad (36)$$

o que é exatamente a transformada wavelet conforme definido em (3). Note que o parâmetro de dilatação surge como consequência do deslocamento logarítmico em frequência de  $\phi_\omega$ , que surge naturalmente na representação tonotópica na cochlea. A semelhança entre a análise realizada pela cochlea e a transformada wavelet sugere que tal método é capaz de representar com maior fidelidade o processo auditivo, e assim seria possível extrair informações do sinal acústico o mais próximas possível das que são extraídas pelo aparelho auditivo.

## 4 Bases Ortonormais de Wavelets: a wavelet de Haar e análise em resoluções múltiplas

Vamos aqui fazer a seguinte restrição: escolheremos  $s_0 = 2$  e  $u_0 = 1$  em (6), ficando na forma

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (37)$$

Existe então  $\psi$  com boa localização tempo-frequência, tal que a família de funções  $\{\psi_{j,k}\}$  constitui uma base ortonormal para  $L^2(\mathbf{R})$ . O exemplo mais antigo (1910) para a função  $\psi$  é a função de Haar,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (38)$$

Embora a wavelet de Haar não possua uma boa localização tempo-frequência (pois a transformada de Fourier  $\widehat{\psi}(\omega)$  decai da forma  $|\omega|^{-1}$  para  $\omega \rightarrow \infty$ ) a utilizaremos como ilustração por possuir uma forma fechada simples e, desta forma, poderemos construir demonstrações de forma simples.

Vamos inicialmente ilustrar o efeito da translação e dilatação na função de Haar (veja as figuras 4, 5 e 6). O suporte de  $\psi_{j,k}$  é  $[2^j k, 2^j(k+1)[$ , segue então, que wavelets de Haar na mesma escala não se sobrepõem, desta forma,  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$ . Fixada a escala  $j$ , as wavelets de Haar serão ortogonais, pois seus suportes não são coincidentes. Para escalas diferentes, é possível obter wavelets com suportes que se sobrepõem. É fácil mostrar que para  $j < j'$ , o suporte de  $\psi_{j,k}$  está completamente dentro de uma região onde  $\psi_{j',k}$  é constante (veja as figuras 4 e 6). Neste caso, o produto interno entre as duas wavelets será proporcional à integral de  $\psi$ , que é zero. Desta forma mostramos que wavelets em escalas diferentes são ortogonais, mesmo nos casos em que os suportes das funções se sobrepõem.

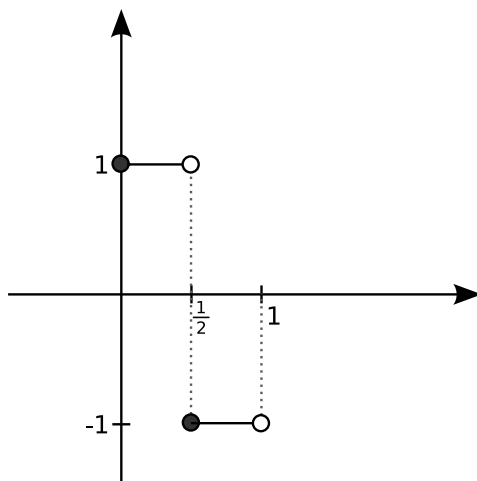


Figura 4: Wavelet de Haar.

Vamos agora pensar em como uma função arbitrária pode ser representada em termos das wavelets de Haar. Uma primeira observação que devemos fazer é que detalhes que sejam menores que metade do suporte da função de Haar não podem ser “enxergados” por essas funções. Detalhes com tamanho muito menor que  $2^{-j}$  praticamente não são “enxergados” por uma wavelet de Haar numa escala inferior a  $j - 1$ , da mesma forma, detalhes muito maiores que  $2^{-j}$  também não serão enxergados por wavelets de Haar de escala superior a  $j + 1$ . As informações passíveis de serem representadas por wavelets em uma dada escala constituem uma faixa, de forma que podemos imaginar escalas subseqüentes como faixas adjacentes, compreendendo detalhes de diferentes tamanhos.

Se tomarmos uma função  $f$  em  $L^2(\mathbf{R})$ , poderemos representá-la com a precisão desejada por uma função constante por partes em intervalos da forma  $[l2^{-j}, (l+1)2^{-j}[$ , bastando para tanto tomar  $j$  tão grande quanto se queira. Vamos restringir então a função  $f$  de forma que esta tenha seu suporte no intervalo  $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$  e seja constante por partes em intervalos  $[l2^{-J_0}, (l+1)2^{-J_0}[$ . Chamaremos então a função  $f$  como definida anteriormente de  $f^0$  e o seu valor em cada

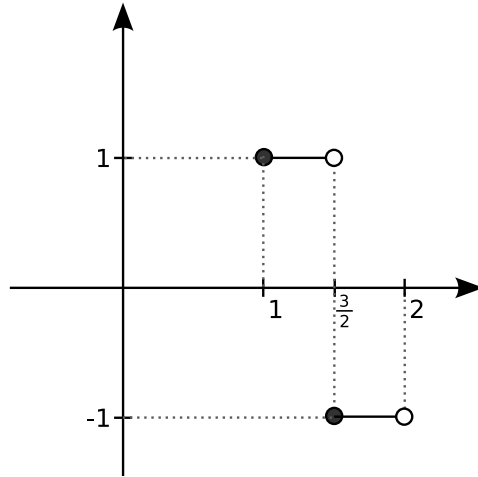


Figura 5: Wavelet de Haar - translação.

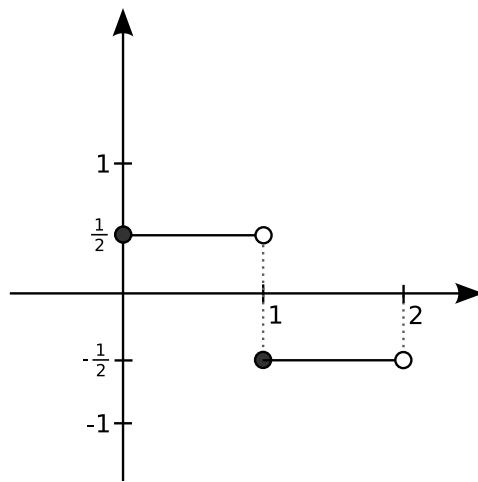


Figura 6: Wavelet de Haar - dilatação.

intervalo em que ela é constante de  $f_l^0$ . Podemos agora decompor  $f^0$  em duas partes  $f^0 = f^1 + \delta^1$ , no qual  $f^1$  é uma aproximação de  $f^0$  constante por partes em intervalos duas vezes maiores que o anterior,  $[k2^{-J_0+1}, (k+1)2^{-J_0+1}[$ . Os valores constantes de  $f^1$ , no intervalo citado anteriormente, são dados por  $f_k^1$ . O valor de  $f_k^1$  é dado pela média dos valores correspondentes em  $f^0$ ,  $f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k}^0 + f_{2k+1}^0)$ . A função  $\delta^1$  é constante por partes em intervalos de mesmo tamanho que os de  $f^0$ , e os valores assumidos são dados por

$$\delta_l^1 = f_l^0 - f_k^1 \quad (39)$$

$$\delta_{l+1}^1 = f_{l+1}^0 - f_k^1. \quad (40)$$

Como  $l = 2k$ , teremos

$$\delta_{2k}^1 = f_{2k}^0 - f_k^1 \quad (41)$$

$$\delta_{2k+1}^1 = f_{2k+1}^0 - f_k^1. \quad (42)$$

Usando agora que  $f_k^1 = \frac{1}{2}(f_l^0 + f_{l+1}^0)$ , teremos

$$\delta_{2k}^1 = f_{2k}^0 - f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k}^0 - f_{2k+1}^0) \quad (43)$$

$$\delta_{2k+1}^1 = f_{2k+1}^0 - f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k+1}^0 - f_{2k}^0) = -\delta_{2k}^1 \quad (44)$$

A função  $\delta^1$  é uma combinação linear de funções de Haar transladadas

$$\delta^1 = \sum_{l=-2^{J_1+J_0-1}+1}^{2^{J_1+J_0-1}} \delta_{2l}^1 \psi_{2l}^1(2^{J_0-1}x - l). \quad (45)$$

Podemos então escrever  $f$  na seguinte forma

$$f = f^0 = f^1 + \delta^1 = f^1 + \sum_l c_{-J_0+1,l} \psi_{-J_0+1,l}. \quad (46)$$

O processo de decomposição apresentado acima pode ser aplicado sucessivamente, de forma que  $f^1$  poderá ser escrito como  $f^1 = f^2 + \delta^2$ , onde  $f^2$  ainda possui suporte em  $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$ , e é constantes por partes em intervalos da forma  $[k2^{-J_0+2}, (k+1)2^{-J_0+2}[$ .

$$f^1 = f^2 + \delta^2 = f^2 + \sum_l c_{-J_0+2,l} \psi_{-J_0+2,l} \quad (47)$$

Continuamo o processo, até que por fim teremos

$$f = f^{J_0+M} + \sum_{m=-J_0+1}^M \sum_l c_{m,l} \psi_{m,l} \quad (48)$$

onde  $f^{J_0+M}$  é constante por partes em intervalos  $[k2^{-J_0+M}, (k+1)2^{-J_0+M}[$ . Para mostrar que a aproximação de  $f$  converge para  $f$  no limite é necessário

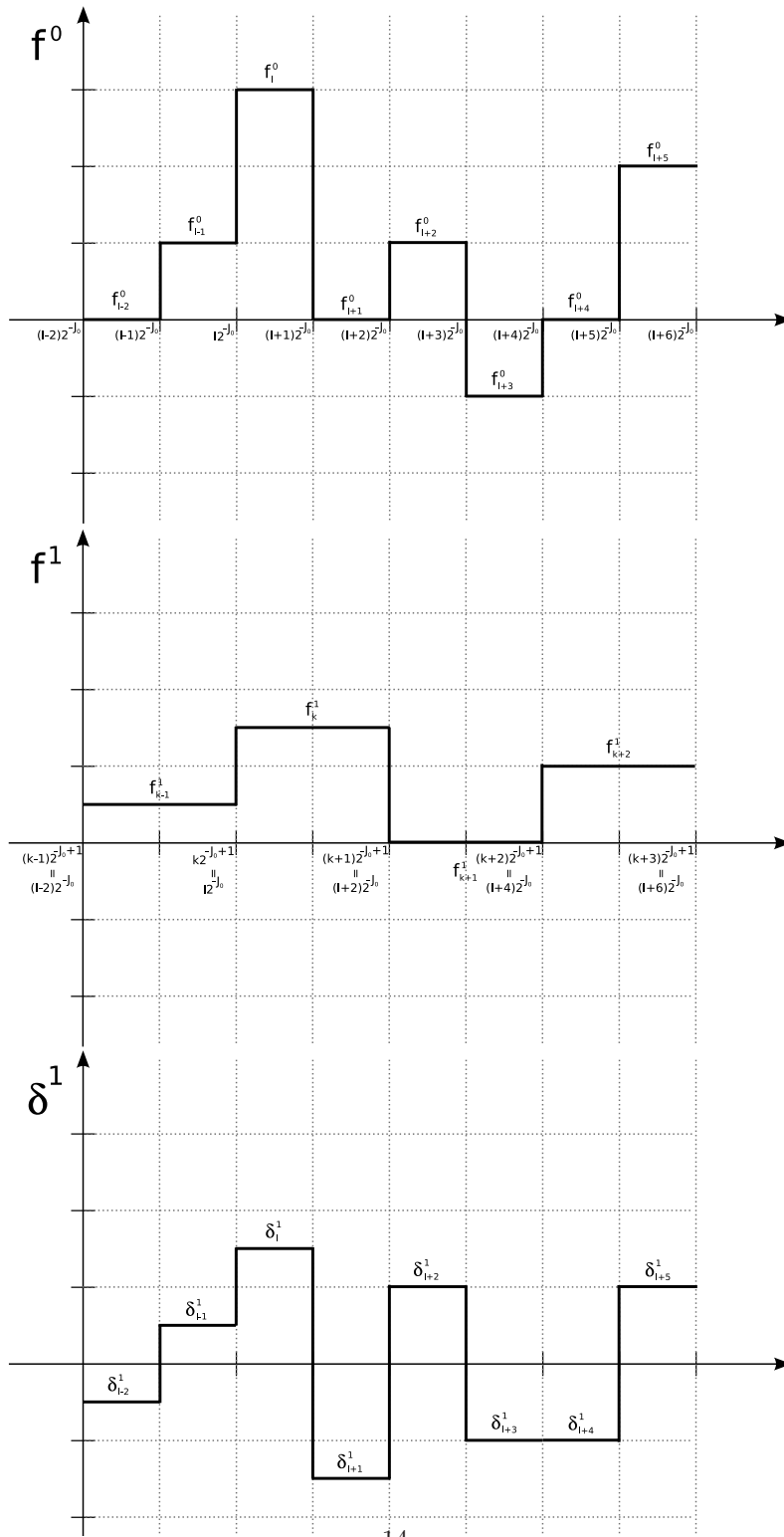


Figura 7: Função  $f^0$  decomposta como  $f^1 + \delta^1$ .

que o processo de decomposição continue expandindo os horizontes para fora do intervalo  $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$ .

$$f = f^{J_0+J_1+K} + \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+K} \sum_l c_{m,l} \psi_{m,l} \quad (49)$$

onde o suporte de  $f^{J_0+J_1+K}$  é  $[-2^{J_1+K}, 2^{J_1+K}]$  e a função assume dois diferentes valores  $2^{-K} f_0^{J_0+J_1}$  e  $2^{-K} f_{-1}^{J_0+J_1}$  nos intervalos  $[0, 2^{J_1+K}[$  e  $[-2^{J_1+K}, 0[$ , respectivamente.

$$f^{J_0+J_1+K}|_{[0, 2^{J_1+K}[} = 2^{-K} f_0^{J_0+J_1} \quad \text{e} \quad f^{J_0+J_1+K}|_{[-2^{J_1+K}, 0[} = 2^{-K} f_{-1}^{J_0+J_1} \quad (50)$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+K} \sum_l c_{m,l} \psi_{m,l}\|_{L^2}^2 &= \|f^{J_0+J_1+K} \dots\|_{L^2}^2 \quad (51) \\ &= 2^{K/2} 2^{J_1/2} [|f_0^{J_0+J_1}|^2 + |f_{-1}^{J_0+J_1}|^2]^{1/2} \quad (52) \end{aligned}$$

pode ser feito arbitrariamente pequeno, bastando para tanto escolher  $K$  grande o suficiente. Mostramos então que  $f$  pode ser aproximado, com a precisão desejada, por uma combinação de wavelets de Haar.

O processo de decomposição mostrado acima pode ser visto como uma forma de se obter representações cada vez mais grosseiras ( $f_1, f_2, f_3, \dots$ ) da função original  $f$ , sendo as informações (detalhes) perdidos a cada passo armazenadas em forma de wavelets ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ ). O que construímos aqui, de forma intuitiva, foi uma análise em resoluções múltiplas, em que cada passo da decomposição é, na verdade, uma projeção feita sobre um subespaço de menor resolução, de forma que a seqüência de subespaços formada será uma seqüência encaixante. Além disso, as funções de base de um subespaço podem ser obtidas através de uma mudança de escala sobre as funções de base de outro subespaço. Veremos mais sobre a análise em resoluções múltiplas na sessão 5.

## 5 Análise em Resoluções Múltiplas

Um sinal pode ser visto como uma componente suave acrescido de flutuações, detalhes. A distinção entre o que é suave e o que são detalhes é feita de acordo com o nível de resolução empregado, isto é, uma escala a partir das quais os detalhes não podem mais ser distinguidos. Uma análise em resoluções múltiplas (ARM) é uma forma de representar uma função em diferentes resoluções. Tais representações são feitas na forma de projeções ortogonais sobre subespaços  $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$  de resolução  $2^{-j}$ . A projeção ortogonal de uma função  $f$  é a função  $f^j \in V_j$  que minimiza  $\|f - f^j\|$ . Para uma função  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , a diferença entre as aproximações  $f^j$  e  $f^{j+1}$ , nas resoluções  $2^{-j}$  e  $2^{-(j+1)}$ , respectivamente, é dada pela soma parcial das wavelets  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ , como visto anteriormente (sessão 4), o que nada mais é do que a projeção de  $f$  sobre o subespaço  $W_j$ .

Os subespaços  $V_j$  formam uma seqüência encaixante tal que  $V_{j+1} \subset V_j$  e ainda  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ , onde os subespaços  $W_{j+1}$  contêm a informação perdida ao se passar de um subespaço  $V_j$  para um subespaço  $V_{j+1}$  (ao se diminuir a resolução por um fator de 2). Chamaremos de funções wavelets as funções de base para os subespaços  $W_j$ , e de funções escala aquelas que formam a base para os subespaços  $V_j$ .

Dizemos que temos uma ARM quando as seguintes propriedades são satisfeitas para uma seqüência de subespaços  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  fechados de  $L^2(\mathbf{R})$

$$\forall j \in \mathbf{Z}, V_{j+1} \subset V_j, \quad (53)$$

$$\forall (j, k) \in \mathbf{Z}^2, f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - 2^j k) \in V_j, \quad (54)$$

$$\forall j \in \mathbf{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0, \quad (55)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \quad (56)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}), \quad (57)$$

$$\exists \phi \in V_0 \text{ tal que } \phi_{0,k}(t) = \phi(t - k) \text{ constitui uma base ortonormal para } V_0. \quad (58)$$

A equação (53) é a propriedade de causalidade na ARM, ela implica que toda a informação em um nível de resolução  $2^{-j-1}$  está contida na resolução  $2^{-j}$ , e portanto, apenas a versão de mais alta resolução é necessário para se obter uma representação mais grosseira do sinal original. (54) garante que os subespaços  $V_j$  sejam invariantes por translações múltiplas de  $2^j$ . A propriedade (55) garante que mudanças de escala por fator de  $2^j$  são capazes de mudar a resolução por um fator de  $2^{-j}$ . Quando a resolução de representação tende a zero ( $\lim_{j \rightarrow +\infty} 2^{-j}$ ), todos os detalhes de  $f$  são perdidos e portanto para qualquer  $f$  teremos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_{V_j} f\| = 0 \quad (59)$$

(propriedade (56)). Por outro lado, quando a resolução tende a infinito,  $\lim_{j \rightarrow -\infty} 2^{-j}$ , a propriedade (57) garante que a aproximação da função  $f$  converge para a função  $f$  original

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\| = 0. \quad (60)$$

A propriedade (58) é, na verdade, um pouco mais forte que o necessário. Na verdade  $\{\phi_{0,k}(t) = \phi(t - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  deve constituir uma base de Riesz (veja o apêndice B para a definição). Isto garante a equivalência de energia, de tal forma que a expansão na base de Riesz seja numericamente estável. Existem  $A, B > 0$  tais que qualquer  $f \in V_0$  pode ser decomposto univocamente da seguinte forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \phi(t - k) \quad (61)$$

de forma que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (62)$$

É possível mostrar que as famílias obtidas a partir de dilatações da base de Riesz de  $V_0$  constituem também bases de Riesz para os subespaços  $V_j$  com os mesmos limites  $A$  e  $B$  em todas as escala  $2^j$ .

A seqüência de subespaços encaixantes é graficamente representada na figura 8. Podemos visualmente verificar a propriedade (53), assim como a  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ , e também a ortogonalidade entre os subespaços  $W_j$  ( $W_j \perp W_{j'}$  quando  $j \neq j'$ ) e entre  $W_j$  e  $V_{j'}$  onde  $j' \geq j$ . É possível também verificar que

$$V_j = V_{j+1+J} \oplus \bigoplus_{n=j+1}^{j+1+J} W_n, \quad (63)$$

ou seja, um subespaço  $V_j$  qualquer pode ser decomposto em um subespaço de mais baixa resolução  $V_{j+1+J}$  mais uma seqüência de  $J$  subespaços  $W_n$ , com  $n$  variando de  $j+1$  a  $j+1+J$ . Uma função  $f^j$  inicialmente representada em  $V^j$  pode ser decomposta como uma versão de baixa resolução  $f^{j+1+J}$  somada aos detalhes correspondentes a cada subespaço  $W_n$ ,  $d^n$ ,

$$f^j = f^{j+1+J} + \sum_{n=j+1}^{j+1+J} d^n \quad (64)$$

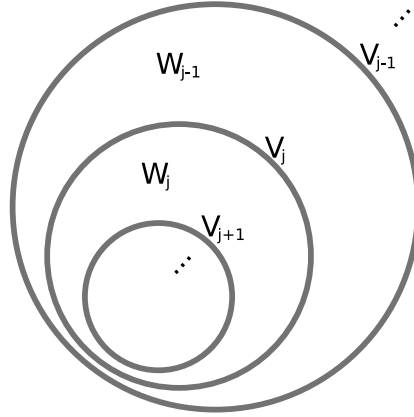


Figura 8: Seqüência de subespaços encaixantes.

Retomando o exemplo da sessão 4 podemos facilmente verificar que a coleção de espaços  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ , sendo os espaços  $V_j$  gerados por funções constantes por partes em intervalos da forma  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ , onde  $k \in \mathbf{Z}$ , satisfaz as condições citadas nas equações (53) a (58), constituindo assim uma ARM para o espaço  $L^2(\mathbf{R})$ . A primeira condição (53) pode ser verificada apenas argumentando que funções constantes por partes em intervalos da forma  $[k2^{j+1}, (k+1)2^{j+1}]$  são também constantes por partes em intervalos da forma  $[k2^j, (k+1)2^j]$ , ou seja, funções no espaço  $V_{j+1}$  podem ser escritas como uma combinação de funções do

espaço  $V_j$  e, por tanto,  $V_{j+1} \subset V_j$ . A condição de invariância por translação (54) é verificada pelo simples fato de que se uma função está em um subespaço  $V_j$ , de funções constantes por partes em intervalos  $[k2^j, (k+1)2^j[$ , então, translações desta função por fatores múltiplos de  $2^j$  levarão a funções ainda constantes por partes em intervalos da mesma forma. Para verificarmos a equação (55), basta notar que se uma função é constante por partes em intervalos da forma  $[k2^j, (k+1)2^j[$ , então, uma compressão desta por um fator  $2^j$ , levará a uma função constante por partes em intervalos da forma  $[k, k+1[$ , ou seja, a função estará agora em  $V_0$ . Para demonstrar (56), basta notar que no limite  $j \rightarrow +\infty$ ,  $V_j$  será um subespaço de funções constantes por partes em intervalos de tamanho tendendo ao infinito. Como a energia não pode ser infinita, a amplitude tende a zero, e por tanto, apenas a função identicamente nula está no subespaço limite. É fácil também verificar que apenas a função identicamente nula está em todos os subespaços  $V_j$ . Tomando o limite na direção oposta,  $j \rightarrow -\infty$ , o subespaço obtido será de funções constantes por partes em intervalos infinitesimais, ou seja, qualquer função em  $L^2(\mathbf{R})$  poderá ser representada. Fica assim demonstrado (57). Para demonstrar o último item (58), basta tomar a função  $\phi$  tal que  $\phi(t) = 1$  no intervalo  $[0, 1[$  e  $\phi(t) = 0$  fora deste intervalo. É fácil verificar que com esta escolha é possível construirmos uma base para  $V_0$ , o espaço de funções constantes por partes em intervalos da forma  $[k, k+1[$ , onde  $k \in \mathbf{Z}$ .

## 6 Algoritmos rápidos de decomposição e reconstrução

Pela ARM sabemos que  $V_j \subset V_{j-1}$ , e por tanto, uma função em  $V_j$  pode ser escrita em termo do conjunto de funções  $\{\phi(2 \cdot -n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  que constitui uma base para  $V_{j-1}$ . Em particular, para  $j = 0$ , teremos

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n) \quad (65)$$

onde  $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$ .

De forma semelhante, como  $W_j \subset V_{j-1}$ , teremos, para o caso  $j = 0$

$$\psi(t) = \sum_n g_n \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n) \quad (66)$$

onde  $g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle$ .

Os coeficientes  $h_n$  e  $g_n$  são, respectivamente, os coeficientes de filtro relacionados à função escala e à função wavelet. Veremos adiante que esses coeficientes determinam completamente essas funções, ou seja, tudo o que é necessário para uma análise wavelet são os coeficientes de filtro. Apenas conhecê-los é suficiente para determinar o valor da função em qualquer ponto, com a precisão desejada, através de um algoritmo recursivo que será mostrado posteriormente em (??). Temos ainda que os coeficientes  $g_n$  podem ser determinados a partir de  $h_n$ , e vice-versa. Além disso, eles não podem assumir quaisquer valores, uma

primeira restrição pode ser obtida, bastando para tanto integrar ambos os lados das equações (65), (66) e lembrarmos que queremos uma base ortonormal, e portanto, a norma  $L^2$  das funções de base é unitária.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n)|^2 dt \quad (67)$$

$$1 = \sum_n h_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\sqrt{2} \phi(2t - n)|^2 dt \quad (68)$$

$$1 = \sum_n h_n^2 \quad (69)$$

Da mesma forma, para a equação (66) teremos

$$1 = \sum_n g_n^2 \quad (70)$$

As funções escala e wavelet devem satisfazer a seguinte relação de escala

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) , \quad (71)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) . \quad (72)$$

Utilizando agora o resultado obtido em (65) e (66), teremos

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2^{-j}2t - 2k - n) \quad (73)$$

$$= 2^{-(j-1)/2} \sum_n h_n \phi(2^{-(j-1)}t - (2k + n)) \quad (74)$$

$$= \sum_n h_n \phi_{j-1,2k+n}(t) \quad (75)$$

e de forma análoga

$$\psi_{j,k} = \sum_n g_n \phi_{j-1,2k+n} . \quad (76)$$

Isso mostra como uma função de base na escala  $j$  pode ser obtida a partir de funções de base na escala anterior  $j - 1$ . Poderemos também mostrar como é possível obter a representação de uma função na escala  $j$  utilizando, para tanto, a representação em  $j - 1$ . Suponha que uma função qualquer  $f$  possa ser escrita na base  $V_j$

$$f^j = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} \quad (77)$$

onde os coeficientes são dados por  $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ . Utilizando a relação (75),

podemos reescrever os coeficiente  $a_{j,k}$  na forma

$$a_{j,k} = \langle f, \sum_n h_n \phi_{j-1,2k+n} \rangle \quad (78)$$

$$= \sum_n \bar{h}_n \langle f, \phi_{j-1,2k+n} \rangle \quad (79)$$

$$= \sum_n \bar{h}_n a_{j-1,2k+n} \quad (80)$$

Todos os coeficientes da representação de  $f$  em  $V_j$  podem ser obtidos a partir da convolução em (80) dos coeficientes da representação de  $f$  em  $V_{j-1}$  com os coeficientes de filtro  $h_k$ .

De maneira análoga, se tomarmos  $f^{j-1} = f^j + \delta^j$  onde  $f^j$  é a projeção sobre o subespaço  $V_j$  e  $\delta_j$  a projeção sobre  $W_j$  ( $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ), podemos obter os coeficientes da representação de  $\delta^j$  ( $d_{j,k}$ ) em termos dos coeficientes  $a_{j-1,k}$ .

$$\delta^j = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (81)$$

onde  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ . Utilizando (76), teremos

$$d_{j,k} = \langle f, \sum_n g_n \phi_{j-1,2k+n} \rangle \quad (82)$$

$$= \sum_n \bar{g}_n \langle f, \phi_{j-1,2k+n} \rangle \quad (83)$$

$$= \sum_n \bar{g}_n a_{j-1,2k+n} \quad (84)$$

Construirmos desta maneira um algoritmo rápido para passar de uma escala para outra escala subsequente. Para tanto é necessário apenas conhecermos os coeficientes  $a_{j,n}$  que representam a função  $f$  numa dada escala  $j$  e também os coeficientes de filtro  $h_k$  da função escala associada à análise. De forma semelhante obtemos uma maneira simples de obter os detalhes perdidos ao se passar de uma escala de maior para uma de menor resolução, sendo agora necessário os coeficientes de filtro  $g_k$  da wavelet associada.

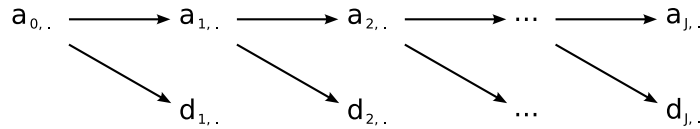


Figura 9: Algoritmo rápido de decomposição.

Seja  $f$  uma função qualquer em  $L^2(\mathbf{R})$ , podemos escolher um subespaço  $V_{j_0}$  de forma que o erro cometido na representação de  $f$  nesse subespaço,  $\|f - f^{j_0}\|$ , seja tão pequeno quanto se queira (onde  $f^{j_0} = P_{V_{j_0}} f$ , a projeção de  $f$  em  $V_{j_0}$ ). Sem perda alguma de generalidade, podemos escolher  $j_0 = 0$ . Seja a família

$\{\phi_{0,k}\}_k$  em  $\mathbf{Z}$  uma base ortonormal para  $V_0$ , podemos escrever  $f^0$  em termos das funções da base

$$f^0 = \sum_k a_{0,k} \phi_{0,k} \quad (85)$$

onde os coeficientes  $a_{0,k}$  são dados por  $a_{0,k} = \langle f, \phi_{0,k} \rangle$ .

Talvez seja interessante obter uma versão de baixa resolução de  $f^0$ . Se quisermos uma perda de resolução por um fator de 2, basta tomarmos agora a projeção de  $f$  no subespaço  $V_1$ . A projeção de  $f$  em  $V_1$  é dada

$$f^1 = P_{V_1} f = \sum_k a_{1,k} \phi_{1,k} \quad (86)$$

Da mesma forma que anteriormente, os coeficientes  $a_{1,k}$  são dados por  $a_{1,k} = \langle f, \phi_{1,k} \rangle$ .

Como  $V_1 \subset V_0$ , podemos escrever  $\phi_{1,k}$  em termos das funções  $\phi_{0,2n+k}$ , como visto em (75).

$$\phi_{1,k} = \sum_k h_k \phi_{0,2n+k} \quad (87)$$

Desta forma, os coeficientes  $a_{1,k}$  podem ser dados em função de  $a_{0,2n+k}$ , como demonstrado na equação (80)

$$a_{1,n} = \sum_k \overline{h_k} a_{0,2n+k} \quad (88)$$

De forma semelhante poderemos obter os detalhes perdidos ao se passar de uma representação de alta para uma de baixa resolução. Seja  $f^0 = f^1 + \delta^1$ , onde  $\delta^1$  representa os detalhes perdidos ao se passar de  $V_0$  para  $V_1$ , teremos

$$\delta^1 = \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k} \quad (89)$$

onde  $d_{1,k} = \langle f, \psi_{1,k} \rangle$ .

As funções  $\psi_{1,k}$  podem ser escritas como uma combinação dos vetores da base  $V_0$ , então

$$\psi_{1,n} = \sum_k g_k \phi_{0,2n+k} \quad (90)$$

$$d_{1,n} = \sum_k \overline{g_k} a_{0,2n+k} \quad (91)$$

Mostramos acima uma forma de obtermos os coeficientes de escala e wavelet para a decomposição, passando de uma escala mais fina, para uma mais grosseira. Queremos ser capazes de reconstruir o sinal original, utilizando para tanto a versão de baixa resolução e os detalhes perdidos. Vejamos então como podemos obter o algoritmo de reconstrução. Tomemos a projeção do sinal  $f$

sobre o subespaço  $V_{j-1}$ . Como  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$  podemos escrever a projeção da seguinte forma

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f \quad (92)$$

$$\sum_n a_{j-1,n} \phi_{j-1,n} = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (93)$$

Os coeficientes  $a_{j-1,n}$  são obtidos por

$$a_{j-1,n} = \langle P_{V_{j-1}}f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (94)$$

$$= \langle (P_{V_j}f + P_{W_j}f), \phi_{j-1,n} \rangle \quad (95)$$

$$= \langle \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \langle \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (96)$$

$$= \sum_k a_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (97)$$

$$= \sum_k a_{j,k} h_{n-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{n-2k} \quad (98)$$

$$= \sum_k h_{n-2k} a_{j,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j,k} \quad (99)$$

O algoritmo construído acima (99) é uma forma de obtermos os coeficientes que representam a função numa escala mais fina, a partir de uma versão de baixa resolução e os detalhes. Este é gráficamente ilustrado na figura 10.

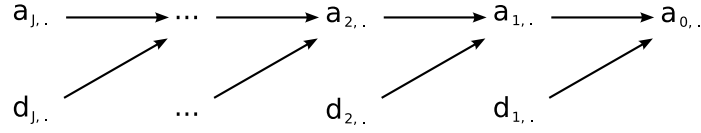


Figura 10: Algoritmo rápido de reconstrução.

## 7 Algumas Wavelets e Propriedades

Uma característica importante da representação através de funções wavelets é a não redundância. A ortogonalidade entre os subespaços  $W_j$  e  $W_{j'}$ ,  $j \neq j'$ , assim como a ortogonalidade entre um subespaço  $V_J$  e os subespaços  $W_j$ , com  $j \leq J$ , acarreta na não redundância da representação de uma função qualquer  $f$  nos subespaços  $V_J, W_{j_0}, W_{j_0+1}, \dots, W_J$ . Esta ausência de redundância é fundamental quando se trata de compressão de dados.

Outra propriedade importante é possuir momentos de diferentes ordem iguais a zero. Dizemos que uma wavelet  $\psi$  possui momento de ordem  $M$  igual a zero, quando

$$\int x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, M. \quad (100)$$

Isto significa que os coeficientes de wavelets para polinômios de ordem até  $M$  são todos nulos. A informação de detalhe gerada no processo de decomposição será toda nula, ou seja, a informação de polinômios de ordem até  $M$  pode ser suprimida. Suponha que tenhamos um sinal  $s(t)$  que pode ser decomposto como  $s(t) = p(t) + n(t)$ , uma parte polinomial de ordem  $M$ ,  $p(t)$ , e outra não polinomial  $n(t)$ . Neste caso, todos os coeficientes de detalhe serão gerados pela informação exclusiva da parte não polinomial,  $d_{j,k} = \langle s(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle p(t) + n(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \langle n(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ . Os coeficientes de wavelets representam então apenas a parte não polinomial do sinal.

Todas as wavelets possuem momento de ordem zero nulo, ou seja, média nula. Desta forma, funções constantes não são representadas pelas funções wavelets. É possível obtermos wavelets com diferentes momentos nulos. As wavelets de suporte compacto propostas por Ingrid Daubechies podem possuir momentos de diferentes ordens nulos. No caso em que apenas o momento de ordem 1 é nulo, a wavelet é equivalente à wavelet de Haar.

O exemplo de wavelet mais antigo é a função de Haar, proposta por Alfred Haar em 1909, embora na época o termo wavelet ainda não tinha sido cunhado. Ele estudava bases incondicionais para classificação de espaços de funções, tal como o espaço de Lebesgue. A sua construção resultou na criação de um sistema completo. A wavelet de Haar é a wavelet mais simples e pode ser vista como uma spline de ordem zero ou como uma wavelet de Daubechies com apenas o momento de ordem zero nulo. A função de Haar, ao contrário de várias outras wavelets, possui fórmula explícita, definida em (38). Não apenas a função de Haar, mas todas as demais splines possuem também fórmula explícita, o que facilita muito a sua manipulação. As wavelets de Haar têm sido utilizadas recentemente para explorar a possibilidade de construir-se wavelets em domínios gerais, tais como esferas. Isto porque elas podem ser manipuladas para satisfazer certas condições geométricas. Desta forma, foram construídas wavelets de Haar em espaços com medidas que não são invariantes à translação (como as medidas de Lebesgue).

Ingrid Daubechies foi precursora na construção de uma família de wavelets ortogonais com suporte compacto e um número específico de momentos nulos. Tais wavelets não possuem fórmula explícita e devem ser calculadas numericamente. A construção destas começa com o cálculo dos coeficientes de filtro, de forma que a transformada de Fourier, a função de resposta em frequência, satisfaça as condições de ortogonalidade e momento. Daubechies tabelou os coeficientes dos filtros para os filtros até ordem 10 em seu trabalho (11). As wavelets de Daubechies possuem o número máximo de momentos nulos ( $N$ ) para um dado tamanho de suporte ( $2N$ ). Existem várias maneiras de escolher as raízes, implicando em diferentes características de fase do filtro. Dentre as  $2^{N-1}$  possibilidades, escolhemos aquela em que todas as raízes encontram-se no interior do círculo unitário, os filtros assim obtidos são chamados filtros de fase extrema.

Em algumas aplicações pode ser também desejado que a função escala de suporte compacto possua também momentos nulos. Coifman sugeriu a Daubechies em 1989 a construção de bases ortonormais de wavelets onde essa característica

fosse incorporada. Tais wavelets, chamadas de coiflets, são mais simétricas que as wavelets de Daubechies. Enquanto as de Daubechies possuem  $N/2 - 1$  momentos nulos, as funções escala das coiflets possuem  $N/3 - 1$  momentos nulos e as wavelets  $N/3$ . A desvantagem das coiflets é o fato destas possuírem um maior suporte que as wavelets de Daubechies, para um mesmo número de momentos nulos,  $N$ , ela apresenta suporte de tamanho  $3N - 1$ , enquanto o suporte das wavelets de Daubechies eram de tamanho  $2N$ .

Outro tipo de wavelet são as wavelets splines, funções que são polinômios por partes. Desta forma elas podem ser localmente bem simples e, ao mesmo tempo, bem flexíveis e suaves. As splines são portanto muito utilizadas para se modelar funções arbitrárias. Quando tratando-se de problemas de interpolação, as splines são preferíveis, em detrimento da interpolação polinomial, pois é possível obter resultados semelhantes utilizando polinômios de ordem inferior, e também são importantes para evitar o fenômeno de Runge.<sup>4</sup>

As wavelets splines podem ser divididas nos seguintes grupos: ortogonal, semi-ortogonal, deslocamento ortogonal e biortogonal. O exemplo mais conhecido de wavelets do primeiro tipo são as wavelets de Battle-Lemarié (4) (19). As wavelets de Battle-Lemarié são tidas como as precursoras da análise em resoluções múltiplas, em que as escalas estão associadas aos espaços funcional das splines, em cada qual tomamos uma B-spline com nós nos inteiros como função escala original. Se a função escala escolhida for a função porta, então resultaremos numa base de Haar. As wavelets semi-ortogonais mantêm a ortogonalidade entre escalas, mas não mais é garantida a ortogonalidade entre funções de base em uma mesma escala (resolução). As B-splines de suporte compacto constituem um exemplo, proposto por Chui-Wang (8) e Unser-Albdroubi-Eden (25). Nas wavelets de deslocamento ortogonal, apenas a ortogonalidade devido à translação em uma mesma escala é mantida, não havendo mais ortogonalidade entre escalas. Para gerar uma base para um subespaço a ortogonalidade entre as funções de base não é necessária, podemos então relaxar as condições de ortogonalidade e obter as wavelets biortogonais. O único exemplo conhecido de wavelet que é ao mesmo tempo de suporte compacto, ortogonal e simétrica é a wavelet e Haar. Em muitas aplicações pode ser necessário construirmos wavelets simétricas de suporte compacto. Para tanto podemos relaxar a condição de ortogonalidade.

---

<sup>4</sup>O fenômeno de Runge é um problema que ocorre quando se faz interpolação com polinômios de alta ordem. Foi descoberto por Carl David Tolmé Runge quando investigando o comportamento do erro ao se utilizar uma interpolação polinomial para se aproximar funções. Quando uma função é interpolada em pontos equidistantes entre duas extremidades, uma oscilação resultante é gerada em direção às extremidades. Tal oscilação pode ser minimizada escolhendo-se para tanto os nós de Chebyshev ao invés de nós equidistantes. Polinômios de maior grau acabam sendo inapropriados para se realizar a interpolação. O problema pode ser evitado utilizando-se splines. Ao se tentar diminuir o erro de interpolação, pode-se optar por aumentar o número de pedaços polinomiais que constituem a spline, ao invés de se aumentar o grau dos polinômios utilizados.

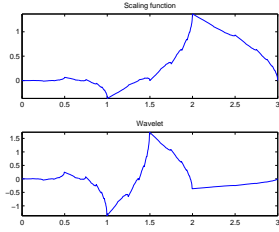


Figura 11: Daubechies 4.

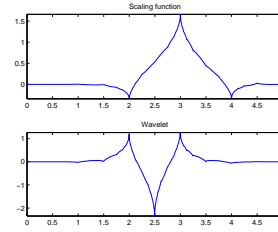


Figura 12: Coiflet 6.

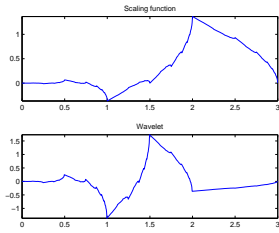


Figura 13: Symlet 2.

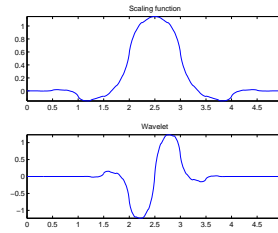


Figura 14: Biorthogonal 1.3.

## 8 Wavelets e Bancos de Filtros

A análise em resoluções múltiplas pode ser vista como um processo de filtragem por um banco de filtros espelhados em quadratura. Iremos então analisar o processo de decomposição utilizando wavelets sob esse diferente ponto de vista.

No algoritmo rápido que vimos acima para decomposição fazemos

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{h_{n-2k}} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (101)$$

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{g_{n-2k}} \langle f, \psi_{j-1,n} \rangle \quad (102)$$

mas isso é equivalente a fazer

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = (\downarrow 2)[(\langle f, \phi_{j-1,n} \rangle) * \overline{h_{-n}}] \quad (103)$$

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = (\downarrow 2)[(\langle f, \psi_{j-1,n} \rangle) * \overline{g_{-n}}] . \quad (104)$$

Ambas equações acima podem ser reescritas na forma matricial. A convolução do sinal com o filtro é representada por uma multiplicação matricial, onde chamamos de  $H$  e  $G$  as matrizes dos filtros  $h$  e  $g$ , respectivamente. A decimação (reamostragem) também será representada por uma multiplicação matricial, onde a matriz  $D$  será a matriz de decimação.

$$H = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ h_0 & h_1 & & & & \\ & h_0 & h_1 & & & \\ & & h_0 & h_1 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \quad (105)$$

$$D = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$DH = \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ h_0 & h_1 & & & & \\ & & h_0 & h_1 & & \\ & & & & h_0 & h_1 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$a_j = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{j,-1} \\ a_{j,0} \\ a_{j,1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (108)$$

As operações escritas em (103) e (104) podem ser representadas então por

$$a_j = DHa_{j-1} \quad (109)$$

$$a_j = DGa_{j-1} \quad (110)$$

A decimação no domínio do tempo é bem simples e consiste apenas em descartar metade das amostras do sinal, alternadamente,

$$v = (\downarrow 2)x = v(k) = x(2k) \quad (111)$$

Para obter a representação no domínio de Fourier, basta

$$V(\omega) = \sum v(k)e^{-j\omega k} = \sum x(2k)e^{-j\omega k} = \sum x(n)e^{-j\omega n/2} \quad (112)$$

A soma acima é apenas para  $n$  pares,  $n = 2k$ , e portanto a afirmativa  $V(\omega) = X(\frac{\omega}{2})$  é falsa. Considerando agora

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sum_{k \text{ par}} b(k)e^{-j\omega k} = \frac{1}{2} \sum_{\text{todo } k} b(k)e^{-j\omega k} + \frac{1}{2} \sum_{\text{todo } k} b(k)e^{-j(\omega+\pi)k} \\ &= \frac{1}{2}[B(\omega) + B(\omega + \pi)] \end{aligned} \quad (113)$$

$$(114)$$

que pode ser facilmente verificado, lembrando para tanto que  $x$  é periódico de período  $2\pi$ , podemos obter

$$V(\omega) = \frac{1}{2} [X(\frac{\omega}{2}) + X(\frac{\omega}{2} + \pi)] \quad (115)$$

bastante para tanto tomarmos os dois últimos resultados.

As operações acima podem ser descritas pelo banco de filtro da figura 15. O sinal de entrada é processado por dois filtros  $L$  e  $H$ , para obtermos as componentes de baixas ( $yl(n)$ ) e altas frequências ( $yh(n)$ ), respectivamente. Neste ponto as sinais filtrados constituem uma representação do sinal original  $x(n)$ , mas juntos, teremos o dobro do número de amostras. Para manter o mesmo número de amostras é feita então uma decimação por uma fator de dois. A saída do banco de filtros ( $S(x(n))$ ) é uma representação do sinal  $x(n)$  em termos de suas componentes de altas e baixas frequências, com o mesmo tamanho que o sinal original. Resta então a pergunta: é possível reconstruir o sinal  $x(n)$  a partir da representação  $S(x(n))$ ?

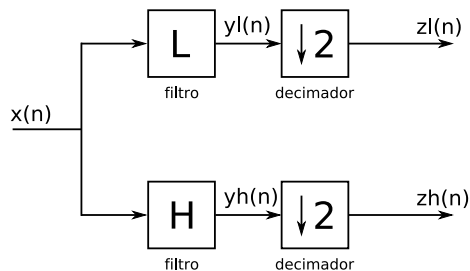


Figura 15: Banco de Filtros.

A resposta a esta pergunta não é óbvia, principalmente devido à decimação feita no processo. Nas figuras 16 e 17 é ilustrado o processo de decimação. A primeira ilustra o caso em que o sinal  $x(n)$  possui um espectro restrito à faixa  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , neste caso não haverá falseamento (aliasing) gerado no processo de decimação. O segundo caso (figura 17) ilustra a situação em que o espectro do sinal não mais está restrito ao intervalo  $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ , neste caso haverá aliasing, ilustrado pela região rachurada na figura. No caso geral devemos assumir que haverá aliasing e, por tanto, só será possível reconstruir o sinal original  $x(x)$  se, de alguma forma, for possível cancelar esse falseamento de forma perfeita.

Uma tentativa de reconstruir o sinal original é usar o banco de filtros de síntese da figura 18, que consistiria em fazer um processo inverso ao que foi feito no banco de análise. Primeiro uma etapa de upsampling e posteriormente uma filtragem, mas o par de filtros agora utilizado ( $\tilde{L}$  e  $\tilde{H}$ ) será diferente. Tentaremos especificar as condições que esses filtros devem satisfazer para que seja possível efetuarmos a reconstrução perfeita do sinal ( $\tilde{x}(n) = \tilde{S}S(x(n)) = x(n)$ ). Geralmente é possível obter a reconstrução perfeita, mas haverá um atraso do sinal, o que não é um problema, pois podemos compensar incluindo um avanço no sinal no sistema.

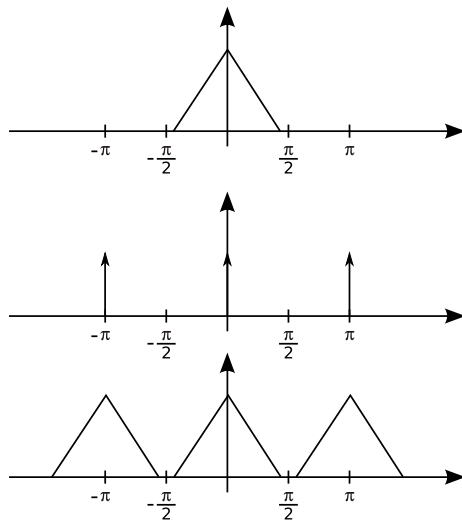


Figura 16: Decimação sem aliasing.

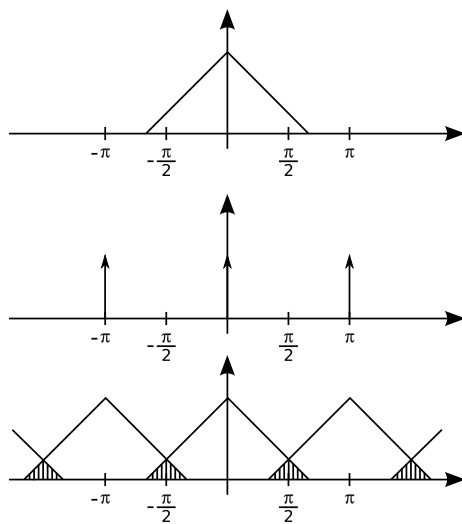


Figura 17: Decimação com aliasing.

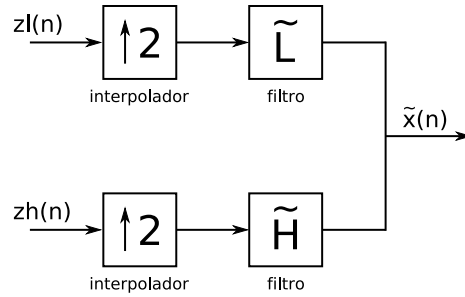


Figura 18: Banco de Filtros de Síntese.

Pelo problema que foi descrito acima, podemos concluir que a questão da possibilidade de se obter a reconstrução perfeita recai no problema da matriz  $S$  ser inversível ou não. Se a inversa existir, e fizermos  $\tilde{S} = S^{-1}$ , então será possível obter a reconstrução do sinal sem erro. Um caso particular importante ocorre quando o sistema linear  $S$  for ortogonal, neste caso a matriz  $S$  será uma matriz ortogonal, sendo portanto sua inversa determinada pela transposta da matriz de análise,  $S^{-1} = S^T$ .

Devemos analisar quais as implicações na frequência do processo de upsampling que será utilizado como a primeira etapa da reconstrução do sinal. Suponhamos ter inicialmente  $v(n)$  e através do upsampling obtemos o sinal  $u(n)$ . Esta operação pode ser representada matricialmente, da seguinte forma

$$u = Uv \quad (116)$$

onde  $u = (\dots, u(-1), u(0), u(1), \dots)^T$ ,  $v = (\dots, v(-1), v(0), v(1), \dots)^T$  e

$$U = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (117)$$

Para representá-la no domínio do tempo é necessário separar as amostras pares das amostras ímpares,  $n = 2k$  e  $n = 2k + 1$ , de forma que

$$u = (\uparrow 2)v = \begin{cases} u(2k) = v(k) \\ u(2k + 1) = 0 \end{cases} \quad (118)$$

No domínio da frequência veremos que os zeros acrescentados nada contribuem para  $U(\omega)$ , e em oposição ao downsampling, quando um termo no domínio do tempo dava origem a dois no domínio da frequência, teremos dois termos no domínio do tempo dando origem a apenas um termo no domínio da frequência.

A representação em frequência de  $u(n)$  será então

$$U(\omega) = \sum_n u(n)e^{-j\omega n} \quad (119)$$

$$= \sum_{n=2k} u(n)e^{-j\omega n} \quad (120)$$

$$= \sum_k u(2k)e^{-j\omega 2k} \quad (121)$$

$$= \sum_k v(k)e^{-j(2\omega)k} \quad (122)$$

$$= V(2\omega) . \quad (123)$$

onde desprezamos os termos ímpares  $(2k+1)$ , pois são eles todos nulos. Se temos  $V(\omega)$  com período  $2\pi$   $U(\omega)$  terá então período  $\pi$ , haverá então uma compressão em frequência por um fator de 2, de forma tal que todo o conteúdo espectral de  $U$  estará agora restrito a  $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ . Como  $U$  terá período  $\pi$ , imagens dessa versão comprimida (em frequência) aparecerão adjacentes a ela (veja a figura 19). Enquanto o downsampling cria o aliasing, o upsampling cria o dual, chamado imageamento (imaging).

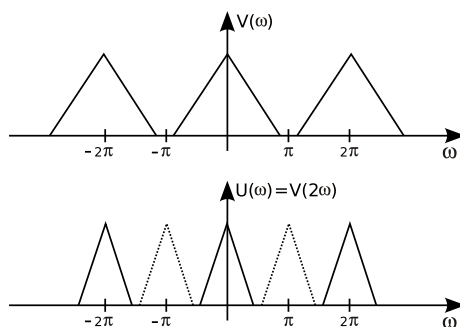


Figura 19: Upsampling.

Considerando o processo de decomposição seguido do processo de reconstrução, veremos que o processo de downsampling é seguido pelo processo de upsampling. Se chamarmos de  $x$  o sinal de entrada e  $u$  o de saída, teremos  $u = (\uparrow 2)(\downarrow 2)x$ . Combinando os resultados de (115) e (123) obtemos

$$U(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X(\omega + \pi)] \quad (124)$$

A análise em resoluções múltiplas discutida anteriormente é vista como uma representação de uma função, inicialmente em um subespaço de  $L^2(\mathbf{R})$ , em subespaços desse subespaço inicial. Cada uma das projeções feita em subespaço com níveis de resolução subseqüentes podem ser vistas como uma filtragem por um banco de filtros, conforme descrito acima. A representação em termos de

funções escala está associada à filtragem passa-baixas, enquanto a representação em termos das funções wavelets está associada ao filtro passa-banda. A análise em resoluções múltiplas definirá um banco de filtros como exposto acima de forma que a reconstrução do sinal seja possível, com erro nulo, pois como vimos, é possível, a partir de uma versão de baixa resolução e dos detalhes associados, obter a versão um nível acima, ou seja, é possível reconstruir a função sem cometer erros. Já que isso acontece no caso da análise em múltiplas resoluções iremos então derivar as condições sobre os filtros de análise e síntese que fazem com que isso seja verdade.

No banco de filtros de decomposição teremos uma seqüência de filtragem e decimação. No caso específico da análise em resoluções múltiplas, o filtro a ser utilizado em todas as etapas possui os mesmos coeficientes  $h_k$ , mas o sinal é decimado ao longo do processo, alterando assim a escala em frequência. Aplicar um filtro após o sinal ter sido decimado por um fator de 2 equivale a aplicar previamente um filtro comprimido por 2 na frequência e em seguida fazer a decimação. Fazer  $y = h \star v$  onde  $v = (\downarrow 2)v'$ , ou seja,  $y = h \star ((\downarrow 2)v')$  equivale a fazer  $y = (\downarrow 2)(h_2 \star v')$ , onde  $h_2$  é tal que  $H_2(\omega) = H(\frac{\omega}{2})$ . Podemos demonstrar isso no domínio da frequência, basta para tanto fazer

$$Y(\omega) = H(\omega)V(\omega) \quad (125)$$

$$= H(\omega)\frac{1}{2}[V'(\frac{\omega}{2}) + V'(\frac{\omega}{2} + \pi)] \quad (126)$$

$$= \frac{1}{2}[H(\omega)V'(\frac{\omega}{2}) + H(\omega)V'(\frac{\omega}{2} + \pi)] \quad (127)$$

$$= \frac{1}{2}[H(\omega)V'(\frac{\omega}{2}) + H(\omega + 2\pi)V'(\frac{\omega}{2} + \pi)] \quad (128)$$

$$= (\downarrow 2)(H(2\omega)V'(\omega)) . \quad (129)$$

Um outra propriedade interessante pode ser facilmente demonstrada. Suponha o caso em que tenhamos  $(\downarrow 2)h \star v$ . Iremos mostrar que isto é equivalente a ter  $h \star (\uparrow 2)v$ . No domínio da frequência a convolução será escrita como um produto. Utilizando a relação (115) teremos

$$((\downarrow 2)H(\omega))V(\omega) = [\frac{1}{2}H(\frac{\omega}{2}) + \frac{1}{2}H(\frac{\omega}{2} + \pi)]V(\omega) \quad (130)$$

$$= \frac{1}{2}H(\frac{\omega}{2})V(\omega) + \frac{1}{2}H(\frac{\omega}{2} + \pi)V(\omega) \quad (131)$$

$$= \frac{1}{2}H(\omega)V(2\omega) + \frac{1}{2}H(2\omega + 2\pi)V(2\omega) \quad (132)$$

$$= H(\omega)V(2\omega) \quad (133)$$

$$= H(\omega)((\uparrow 2)V(\omega)) \quad (134)$$

e por tanto, fica demonstrada o que foi proposto. A equivalencia entre  $h \star (\downarrow 2)v$  e  $(\uparrow 2)h \star v$  segue de forma análoga.

Analisaremos agora o efeito de um banco de filtro conforme esquematizado na figura 20. Este é chamado Banco de Filtros Espelhados em Quadratura de

dois canais (Two-Channel Quadrature Mirror Filter Bank). É uma estrutura muito comum e muito utilizada. O banco de análise é composto por um filtro passa-baixas ( $H(\omega)$ ) e um filtro passa-altas ( $G(\omega)$ ), dividindo o sinal de entrada em duas bandas complementares. Os sinais resultantes de cada um dos filtros é então decimado por um fator de dois. Para a síntese do sinal original, a primeira etapa é a interpolação. A decimação e a interpolação causam aliasing e imaging. Os filtros de síntese ( $\tilde{H}(\omega)$  e  $\tilde{G}(\omega)$ ) possuem como propósito eliminar as imagens espectrais.  $\tilde{H}(\omega)$  será um filtro passa-baixas para eliminar as imagens de altas frequências criadas na interpolação do sinal de baixas frequências. De maneira análoga,  $\tilde{G}(\omega)$  será um filtro passa-altas para eliminar as imagens de baixa frequência criadas na interpolação do sinal de altas frequências. Como resultado,  $y_1$  e  $y_2$  são boas aproximações para  $x_1'$  e  $x_2'$ . O sinal reconstruído será portanto bem semelhante ao original. Note que o nome filtros espelhados em quadratura deriva do fato a resposta de  $H(\omega)$  ser uma imagem espelhada de  $G(\omega)$  em relação à frequência  $\pi/2$  (um quarto da frequência amostragem).

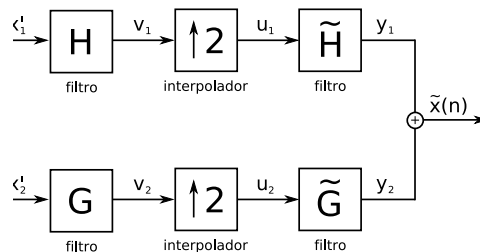


Figura 20: Banco de Filtros (decomposição e síntese).

Para que não haja aliasing é necessário que as respostas dos filtros não se sobreponham, assim como ilustrado no primeiro gráfico da figura 21. No entanto, para que toda a informação do sinal de entrada este presente no banco de análise é necessário que os filtros se sobreponham, ou que os filtros sejam ideais, tenham uma transição abrupta em  $\pi/2$ . Mas sabemos que filtros ideais são impossíveis de serem obtidos, e filtros próximos do ideal precisam ser filtros de alta ordem, sendo sensíveis à quantização e geralmente sofrem de problemas de instabilidade (se forem IIR).

A filosofia por trás dos filtros espelhados em quadratura, e assim também dos filtros wavelets, é permitir o aliasing na saída do decimador, mas os filtros devem ser projetados de tal forma que as imagens produzidas no interpolador cancele o aliasing, perfeitamente no caso dos filtros wavelets, levando a um problema mais estrito.

Para o banco de filtros em questão teremos  $\tilde{x} = y_1 + y_2$ . Vamos então achar

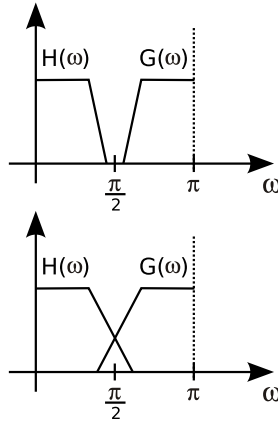


Figura 21: Filtros Espelhados em Quadratura.

$y_1$  e  $y_2$  no domínio da frequência.

$$Y_1(\omega) = \tilde{H}(\omega)U(\omega) \quad (135)$$

$$= \tilde{H}(\omega)\left(\frac{1}{2}[X'(\omega) + X'(\omega + \pi)]\right) \quad (136)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{H}(\omega)[H(\omega)X(\omega) + H(\omega + \pi)X(\omega + \pi)] \quad (137)$$

$$= \frac{1}{2}[\tilde{H}(\omega)H(\omega)X(\omega) + \tilde{H}(\omega)H(\omega + \pi)X(\omega + \pi)] \quad (138)$$

De maneira análoga podemos obter

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2}[\tilde{G}(\omega)G(\omega)X(\omega) + \tilde{G}(\omega)G(\omega + \pi)X(\omega + \pi)] . \quad (139)$$

E juntado os resultados podemos expressão  $\tilde{X}$  em termo das entradas

$$\tilde{X}(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) \quad (140)$$

$$= X(\omega)\frac{1}{2}[\tilde{H}(\omega)H(\omega) + \tilde{G}(\omega)G(\omega)] + \quad (141)$$

$$X(\omega + \pi)\frac{1}{2}[\tilde{H}(\omega)H(\omega + \pi) + \tilde{G}(\omega)G(\omega + \pi)] \quad (142)$$

Para que a reconstrução realizada pelo filtro seja perfeita, iremos querer  $\tilde{X}(\omega) = X(\omega)$  e por tanto será necessário que as duas opções seguintes seja satisfeitas

$$H(\omega)\tilde{H}(\omega) + G(\omega)\tilde{G}(\omega) = 2 \quad (143)$$

$$H(\omega + \pi)\tilde{H}(\omega) + G(\omega + \pi)\tilde{G}(\omega) = 0 \quad (144)$$

ou seja, queremos cancelar o termo em  $X(\omega + \pi)$ , o termo de aliasing e imaging. Para tanto basta tomar os filtros de síntese da seguinte forma

$$\tilde{H}(\omega) = G(\omega + \pi) \quad (145)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -H(\omega + \pi) . \quad (146)$$

A condição (143) fica então

$$H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega) = 2 . \quad (147)$$

Cancelado o aliasing o banco de filtros torna-se um sistema linear e invariante no tempo. A sua função de transferência é agora facilmente determinada, bastando tomar a razão entre saída e entrada.

$$T(\omega) = \frac{\tilde{X}(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2}[H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega)] \quad (148)$$

Se queremos um banco de filtros com reconstrução perfeita do sinal, não podemos admitir distorções, neste caso, permitiremos que  $T(\omega)$  seja no máximo um atraso, i.e.,  $T(\omega) = e^{-j\omega\tau_0}$ . Neste caso, com esta condição um pouco menos restritiva, a condição (147) ficará na seguinte forma

$$H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega) = 2e^{-j\omega\tau_0} . \quad (149)$$

O sistema de equações constituído por (143) e (144) pode ser reescrito em forma matricial, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} H(\omega) & G(\omega) \\ H(\omega + \pi) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) \\ \tilde{G}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-j\omega\tau_0} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (150)$$

Temos então a matriz de modulação de análise, que é central na teoria de bancos de filtros. Podemos também, sem dificuldades, obter a matriz de modulação de síntese, bastando para tanto tomarmos as mesmas equações, mas agora substituir  $\omega$  por  $\omega + \pi$ .

$$\begin{bmatrix} H(\omega) & G(\omega) \\ H(\omega + \pi) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) & \tilde{H}(\omega + \pi) \\ \tilde{G}(\omega) & \tilde{G}(\omega + \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-j\omega\tau_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (151)$$

Utilizando a inversa da matriz de análise podemos obter os filtros de síntese, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega) \\ \tilde{G}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{2}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} G(\omega + \pi) \\ -H(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad (152)$$

onde  $\Delta(\omega)$  é o determinante da matriz de análise

$$\Delta(\omega) = H(\omega)G(\omega + \pi) - H(\omega + \pi)G(\omega) . \quad (153)$$

Os filtros de reconstrução serão estáveis apenas se o determinante for não nulo em todo o intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Se os filtros em questão possuírem uma resposta ao impulso finita, então, o determinante  $\Delta(\omega)$  pode ser calculado. Isso leva a uma relação simples entre os filtros de decomposição e reconstrução.

A equação (152) fornece uma maneira se obtermos os filtros de síntese, de forma que teremos

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{2}{\Delta(\omega)} G(\omega + \pi) \quad \text{e} \quad (154)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{2}{\Delta(\omega)} H(\omega + \pi) . \quad (155)$$

Utilizando a definição acima (154) podemos retirar

$$G(\omega) = G(\omega + 2\pi) = \tilde{H}(\omega + \pi) \frac{\Delta(\omega + \pi)}{2} \quad (156)$$

Usando agora (155) e (156) obtemos

$$\tilde{G}(\omega)G(\omega) = -\frac{\Delta(\omega + \pi)}{\Delta(\omega)} \tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) . \quad (157)$$

Pela definição (153) é fácil mostrar que  $\Delta(\omega + \pi) = -\Delta(\omega)$ , então

$$\tilde{G}(\omega)G(\omega) = \tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) . \quad (158)$$

Utilizando agora o resultado de (158) em (143)

$$\tilde{H}(\omega)H(\omega) + \tilde{H}(\omega + \pi)H(\omega + \pi) = 2 . \quad (159)$$

Se os filtros possuírem resposta ao impulso finita, então suas representações em frequência serão na forma de uma série finita em  $\exp(\pm jn\omega)$ . Desta forma, o determinante definido em (153) será também representado por uma série finita. E ainda mais, as equações (154) e (155) mostram que  $\Delta^{-1}(\omega)$  deve também ser representado por uma série finita. Como ambos  $\Delta(\omega)$  e  $\Delta^{-1}(\omega)$  são séries finitas em  $\exp(\pm jn\omega)$ , podemos concluir que elas devem possuir apenas um termo. Como  $\Delta(\omega + \pi) = -\Delta(\omega)$ , concluímos que o expoente  $n$  deve ser ímpar. Finalmente concluímos que  $\Delta(\omega)$  deve ser da forma

$$\Delta(\omega) = ae^{j(2l+1)\omega} \quad (160)$$

onde  $a \in \mathbf{R}$  e  $l \in \mathbf{Z}$ . O que nos leva, usando as relações (154) e (155) a

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{2}{a} e^{-j(2l+1)\omega} G(\omega + \pi) \quad \text{e} \quad (161)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{2}{a} e^{-j(2l+1)\omega} H(\omega + \pi) . \quad (162)$$

Se impormos que o filtro de reconstrução deva ser igual ao filtro de síntese,  $\tilde{H}(\omega) = H(\omega)$ , teremos, a partir de (159),

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2 , \quad (163)$$

condição esta que define os filtros conjugados espelhados. Veremos posteriormente, ao analisar as funções wavelets no domínio da frequência, que esta mesma condição será derivada.

De maneira análoga é possível obter

$$\tilde{G}(\omega)G(\omega) + \tilde{G}(\omega + \pi)G(\omega + \pi) = 2 . \quad (164)$$

Mais uma vez escolhendo a condição que fornece filtros conjugados espelhados, teremos agora

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 2 . \quad (165)$$

A condição para que não haja distorção (143) pode ser reescrita, definindo para tanto  $P_0(\omega) = H(\omega)\tilde{H}(\omega)$  e  $P_1(\omega) = G(\omega)\tilde{G}(\omega)$

$$P_0(\omega) + P_1(\omega) = 2e^{j\omega\tau_0} . \quad (166)$$

Usando as escolhas feitas em (145) e (146) teremos  $P_1(\omega) = -P_0(\omega + \pi)$

$$P_1(\omega) = G(\omega)\tilde{G}(\omega) = -G(\omega)H(\omega + \pi) = -\tilde{H}(\omega + \pi)\omega + \pi = -P_0(\omega + \pi) . \quad (167)$$

Podemo assim simplificar a equação (166)

$$P_0(\omega) - P_0(\omega + \pi) = 2e^{j\omega\tau_0} . \quad (168)$$

O projeto dos filtros agora restringe-se a projetar um filtro passa-baixas  $P_0$  satisfazendo a condição (168), em seguida, deve-se fatorar  $P_0$  em  $H$  e  $\tilde{H}$ , e então, através das relações (145) e (146) encontrar os outros dois filtros.

Vamos adotar agora como convenção a utilização da variável complexa, então, ao invés de utilizarmos  $\omega$ , passaremos a utilizar  $z$ . A relação entre as duas variáveis é dada por  $e^{j\omega} = z$ . Nada mais é que um mapeamento, sendo as freqüências reais mapeadas no círculo unitário  $|z| = 1$ , as freqüências complexas com parte real negativa são mapeadas no interior do círculo e as de parte real positiva no exterior do círculo.

Ao se realizar tal mapeamento, estaremos evitando a inconveniência da impossibilidade de se distinguir entre as freqüências  $\omega$ ,  $\omega + 2\pi$ ,  $\omega + 4\pi$ , etc. No domínio  $z$  essas freqüências são mapeadas em um mesmo ponto, e portanto evitamos a preocupação em tentar distinguir tais freqüências, pois os números complexos  $z = e^{j\omega}$ ,  $z = e^{j\omega+2\pi}$ ,  $z = e^{j\omega+4\pi}$ , etc, são absolutamente iguais. Esse resultado é também válido para freqüências complexas, pois basea-se apenas no fato de que  $e^{j2\pi} = 1$ .

Dado um sinal discreto  $x(n)$ , temos a sua representação em freqüência  $X(\omega)$  e agora a sua representação no domínio  $z$ ,  $X(z)$ , dada pela transformada  $z$  do sinal

$$X(z) = \sum_n x(n)z^{-n} . \quad (169)$$

Poderemos agora transpor as propriedades dos filtros vistos anteriormente para o domínio  $z$ . A equação (168) fica

$$P_0(z) - P_0(-z) = 2z^l , \quad (170)$$

e as equações (145) e (146) ficam

$$\tilde{H}(z) = G(-z) \quad (171)$$

$$\tilde{G}(z) = -H(-z) . \quad (172)$$

Existem várias formas de se escolher o polinômio  $P_0(z)$ , assim como várias são as formas de fatorá-lo em  $H(z)$  e  $\tilde{H}(z)$ . Note que a grau do polinômio  $P_0(z)$  determina o grau dos polinômios  $H(z)$  e  $\tilde{H}(z)$ , sendo o grau do primeiro a soma dos graus do segundo e terceiro. A condição (170) acima pode ser vista como uma condição sobre os termos de potência ímpar em  $P_0(z)$ . Os termos de potência ímpar deve possuir coeficientes nulos, exceto o termo em  $z^l$ , que deve possuir coeficiente unitário.

Uma maneira utilizada de se escolher o polinômio  $P_0(z)$  é defini-lo da seguinte forma

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p}Q(z) . \quad (173)$$

Essa é a chamada construção binomial ou maximamente plana, devido ao termo  $(1 + z^{-1})^{2p}$ . O termo binomial fornece  $2p$  zeros em  $z = -1$ , desta forma a resposta é maximamente plana em  $\omega = \pi$ . O termo binomial sozinho representa um filtro spline, mas  $Q(z)$  será necessário. Mais sobre a construção desses polinômios será discutido adiantes, seguindo os passos de Daubechies.

A equação (170) pode ser simplificada, utilizando para tanto a seguinte normalização

$$P(z) = z^l P_0(z) . \quad (174)$$

Como  $l$  é ímpar, então  $P(-z) = (-z)^l P_0(-z) = -z^l P_0(-z)$ , e a equação (170) se reduz a

$$P(z) + P(-z) = 2 . \quad (175)$$

Os termos ímpares se anulam (ao combinar  $P(z)$  com  $P(-z)$ ), e todos os termos pares de  $P(z)$  devem ser nulos, com exceção do termo constante que deve ser igual a um.

## 9 Wavelets no Domínio da Frequência

Para obtermos uma representação no domínio da frequência, iremos utilizar a transformada de Fourier. Tomemos a função escala  $\phi$ . A transformada de Fourier da função escala é dada abaixo

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-j\omega t} dt \quad (176)$$

Se aplicarmos a (176) a relação de escala (65), teremos

$$\widehat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (177)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) e^{-j\omega t} dt \quad (178)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(t') e^{-j\omega \frac{t'+k}{2}} \frac{1}{2} dt' \quad (179)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k h_k e^{-j\frac{\omega}{2}k} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t') e^{-j\omega \frac{t'}{2}} dt' \quad (180)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k h_k e^{-j\frac{\omega}{2}k} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (181)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (182)$$

onde definimos

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-j\omega k}. \quad (183)$$

A relação (182) acima nada mais é que a relação de dilatação vista no domínio de Fourier.

De forma similar podemos obter a relação para a função wavelet  $\psi$

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (184)$$

onde  $G(\omega)$  é dado por

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-j\omega k}. \quad (185)$$

As equações (183) e (185) são representações no domínio da frequência para os filtros de escala e wavelet, respectivamente. É interessante aqui notar que estas representações, a menos do fator  $\sqrt{2}/2$  é idêntica a resposta em frequência de filtros digitais, conforme visto em (??). Isso mostra a equivalência entre os filtros digitais implementados com os coeficientes de escala e wavelet e a função de transferência entre a representação em uma escala e a representação na escala seguinte.

Queremos que as funções escala satisfaçam certas condições de ortogonalidade. E ainda mais, que as funções geradas por translações e dilatações sejam ortogonais entre si. Vejamos primeiramente como a ortogonalidade entre funções transladadas numa mesma escala se reflete no domínio da frequência.

Desejamos que  $\phi(t)$  seja ortogonal a  $\phi(t - k)$ , onde  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \overline{\phi(t - k)} dt = \delta_{0,k} \quad (186)$$

Aplicando o Teorema de Parseval (veja apêndice A) à equação acima (186),

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\widehat{\phi}(\omega)} e^{j\omega k} d\omega \quad (187)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 e^{j\omega k} d\omega \quad (188)$$

podemos agora dividir a integral como um somatório de várias integrais

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 e^{j\omega k} d\omega \quad (189)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |\widehat{\phi}(\omega' + 2\pi l)|^2 e^{j\omega' k} e^{j2\pi l k} d\omega' \quad (190)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 e^{j\omega k} d\omega \quad (191)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (192)$$

onde definimos

$$A(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 . \quad (193)$$

$A(\omega)$  é uma função periódica, de período  $2\pi$ , e por tanto, possui uma série de Fourier

$$A(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_k a_k e^{-j\omega k} \quad (194)$$

Queremos a ortonormalidade de  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ , ou seja

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \delta_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} \quad (195)$$

Quando  $k = 0$ , teremos

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle|_{k=0} = \langle \phi(t), \phi(t) \rangle = \|\phi(t)\|^2 = 1 \quad (196)$$

Para  $k \neq 0$

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \delta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 e^{j\omega k} d\omega \quad (197)$$

Se fizermos a seguinte escolha

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1 , \quad (198)$$

a equação (197) se reduzirá a

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \delta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\omega k} d\omega. \quad (199)$$

Usando agora a identidade

$$\int e^{j\omega k} d\omega = 2\pi\delta(k), \quad (200)$$

teremos

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \frac{1}{2\pi} 2\pi\delta(k) = \delta_k \quad (201)$$

Para garantir que isso aconteça, basta dividirmos  $\phi$  pela raiz quadrada de  $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$ .

$$\hat{\phi}_{orto}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sqrt{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}}, \quad (202)$$

de forma que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}_{orto}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)}{\sqrt{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}} \right|^2 = 1. \quad (203)$$

Desat forma,  $\hat{\phi}_{orto}(\omega)$  satisfaz a condição (198), e então,  $\{\phi_{orto}(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  é ortonormal.

Vejamos agora como a escolha feita em (198) se reflete através da equação de dilatação do ponto de vista de Fourier (182) como uma condição sobre  $H(\omega)$ .

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 |\hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right)|^2 \quad (204)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |H(\omega' + \pi l)|^2 |\hat{\phi}(\omega' + \pi l)|^2 = 1 \quad (205)$$

A relação (205) é verdadeira para todo  $\omega' = \omega/2$ , podemos então simplesmente substituir  $\omega'$  por  $\omega$ . Separando os termos pares ( $l = 2k$ ) e os ímpares ( $l = 2k+1$ ), teremos

$$2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(\omega + 2k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(\omega + (2k+1)\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + (2k+1)\pi)|^2. \quad (206)$$

Como  $H(\omega)$  é periódico de período  $2\pi$ , temos

$$H(\omega + 2k\pi) = H(\omega) \quad \text{e} \quad H(\omega + (2k+1)\pi) = H(\omega + \pi). \quad (207)$$

Desta forma, a equação (206) se reduz a

$$|H(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + (2k+1)\pi)|^2 = 2. \quad (208)$$

Como fizemos a escolha (198), (208) se reduz a

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad (209)$$

que é a mesma condição derivada em (163).

Como  $H(\omega)$  é definido em termos de  $\{h_k\}$  em (183), a condição (209) é na verdade uma condição sobre os coeficientes de filtro  $\{h_k\}$  para que  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  seja ortogonal.

De maneira semelhante derivamos as condições no domínio da frequência para que as funções wavelets também satisfaçam a condição de ortogonalidade por translação. Para que  $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  seja ortogonal será necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(\omega - 2\pi k)|^2 = 1 \quad (210)$$

ou, de forma equivalente, como mostramos no caso análogo das funções escala,

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (211)$$

A relação (211) acima, por sua vez, impõe uma restrição sobre os valores de  $\{g_k\}$ .

Falta-nos agora derivar as condições no domínio da frequência para que  $\{\phi(t-k)\}$  e  $\psi(t-k)$  sejam ortogonais entre si. Ou seja, queremos

$$\langle \phi(t), \psi(t-k) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \overline{\psi(t-k)} dt = 0 \quad (212)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(\omega)} e^{j\omega k} d\omega \quad (213)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2\pi l)} e^{j\omega k} d\omega \quad (214)$$

Para que tenhamos ortogonalidade, será necessário que os termos  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2\pi l)}$  sejam identicamente nulos.

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\psi}(\omega + 2\pi l)} = 0 \quad (215)$$

Utilizando agora as relações (182) e (184), reescrevemos a condição (215) na seguinte forma

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \overline{G\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right)} = 0 \quad (216)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} H(\omega' + \pi l) \widehat{\phi}(\omega' + \pi l) \overline{G(\omega' + \pi l) \widehat{\phi}(\omega' + \pi l)} = 0 . \quad (217)$$

Como a relação acima é válida para todo  $\omega' = \omega/2$ , podemos substituir  $\omega'$  por  $\omega$ . E em seguida, mais uma vez, separaremos os termos pares ( $l = 2k$ ) dos termos ímpares ( $l = 2k + 1$ ).

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + 2k\pi) \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi) \overline{G(\omega + 2k\pi) \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + (2k + 1)\pi) \widehat{\phi}(\omega + (2k + 1)\pi) \overline{G(\omega + (2k + 1)\pi) \widehat{\phi}(\omega + (2k + 1)\pi)} = 0 \quad (218)$$

Lembramos mais uma vez que  $H(\omega)$ ,  $G(\omega)$  e  $\widehat{\phi}(\omega)$  são todos periódicos com período  $2\pi$ . Assim, a equação (218) fica na forma

$$H(\omega) \widehat{\phi}(\omega) \overline{G(\omega) \widehat{\phi}(\omega)} + H(\omega + \pi) \widehat{\phi}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi) \widehat{\phi}(\omega + \pi)} = 0 \quad (219)$$

Se tivermos  $\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega + \pi)$  a equação (219) se reduz a

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0 . \quad (220)$$

Esta condição deve ser satisfeita para que  $\{\psi(t - k)\}$  e  $\{\phi(t - k)\}$  sejam ortogonais entre si. A condição (220) estabelece uma relação entre os coeficientes wavelet  $\{g_k\}$  e aquelas da equação de dilatação  $\{h_k\}$ , através de (183) e (185). Para encontrar uma relação explícita entre os dois conjuntos de coeficientes, precisamos resolver a equação.

Por definição sabemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (221)$$

isto implica em termos  $\widehat{\phi}(0) = 1$ , e então, pela relação (182) teremos

$$H(0) = \sqrt{2} \quad (222)$$

Utilizando agora (222) juntamente com (209) teremos

$$H(\pi) = 0 \quad (223)$$

Utilizando agora a relação entre  $H$  e  $G$ , dada em (220), podemos concluir que

$$G(0) = 0 \quad (224)$$

Como  $G$  satisfaz a relação (211), concluimos também que

$$G(\pi) = \sqrt{2} \quad (225)$$

O fato de que  $H(0) = G(\pi)$ ,  $H(\pi) = G(0)$  e  $H(\omega)\overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi)\overline{G(\omega + \pi)} = 0$  fazem de  $H$  e  $G$  um par de filtros complementares. Estes são chamados filtros conjugados espelhados, pois suas respostas em frequência são imagens espelhadas com relação à frequência central  $\pi/2$  (também conhecida como frequência de quadratura).

As condições (222) e (223) fornecem uma dica de que  $H$  possa ser escrito da seguinte forma

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2}\right)^m Q(\omega) \quad (226)$$

onde  $m \geq 1$  e  $Q$  é uma função periódica de período  $2\pi$ . Observe que, quando  $\omega = \pi$ ,  $e^{i\pi} = -1$ , então  $H(\pi) = 0$ , conforme a restrição em (223). Fazendo agora  $\omega = 0$ , teremos  $e^0 = 1$ , e portanto  $H(0) = Q(0)$ . Para que a condição (222) seja também satisfeita, vamos exigir  $Q(0) = \sqrt{2}$ . Além disso, exigiremos também que  $Q(\pi) \neq 0$ , para que a multiplicidade da raiz de  $H$  em  $\pi$  não seja aumentada por  $Q$ .

Como fizemos a escolha em (226) é interessante ver graficamente a forma da função  $\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^m$  para alguns valores de  $m$ . Vejamos então as figuras 22 a 24. Podemos observar que quão maior o valor de  $m$  menor será a banda passante do filtro  $H$ .

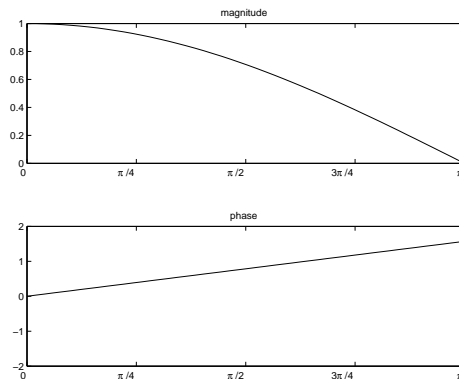


Figura 22:  $m = 1$ .

É fácil observar que a equação (220) é satisfeita para a seguinte escolha de  $G(\omega)$

$$G(\omega) = \lambda(\omega)\overline{H(\omega + \pi)}, \quad (227)$$

onde  $\lambda(\omega) = -\lambda(\omega + \pi)$  é uma função periódica de período  $2\pi$  e  $|\lambda(\omega)|^2 = 1$ .

Observe que a escolha feita acima não especifica unicamente um  $G$  ou uma wavelet, temos a liberdade de escolher funções periódicas de período  $2\pi$  e de módulo unitário. Podemos, por exemplo, escolher  $\lambda(\omega) = -e^{-j\omega}$ , mas sempre tendo em mente que outras escolhas são igualmente possíveis. Com tal escolha,  $G$  será da seguinte forma

$$G(\omega) = -e^{-j\omega}\overline{H(\omega + \pi)} \quad (228)$$

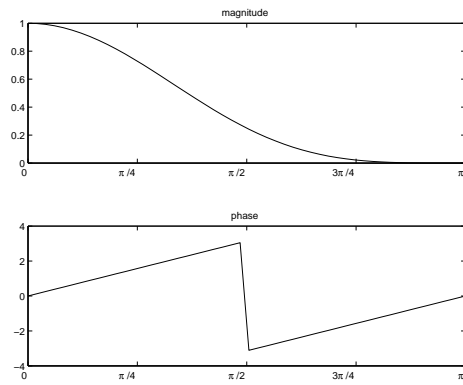


Figura 23:  $m = 4$ .

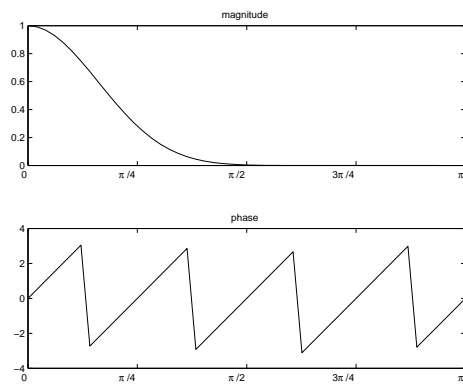


Figura 24:  $m = 16$ .

Escrevendo  $H(\omega)$  explicitamente usando (183), teremos

$$G(\omega) = -e^{-j\omega} \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{j(\omega+\pi)k} \quad (229)$$

$$= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} (-e^{-j\omega}) e^{j\omega k} e^{j\pi k} \quad (230)$$

$$= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} (-1)^{1-k} e^{-j(1-k)\omega} \quad (231)$$

$$= \sum_n \frac{(-1)^n h_{1-n}}{\sqrt{2}} e^{-j\omega n} \quad (232)$$

Comparando o resultado de (232) com a definição de  $G$  em (185), imediatamente identificamos os coeficientes  $g_n$

$$g_n = (-1)^n h_{1-n} . \quad (233)$$

Uma vez que a função escala  $\phi$  é conhecida, os coeficientes  $\{h_k\}$  são obtidos calculando o produto interno entre  $\phi$  e  $\phi_{1,k}$ . Por sua vez, os coeficientes  $\{g_k\}$  serão obtidos pela relação (233). Através da equação (66), podemos calcular a função wavelet. Por outro lado, se conhecemos os coeficientes  $\{h_k\}$ , podemos achar a função escala resolvendo, para tanto, a equação de dilatação (65).

## 10 Funções no Domínio da Freqüência

Na sessão anterior, vimos anteriormente a representação das funções escala e wavelet no domínio da freqüência. Foi também mostrado a equivalência entre a resposta em freqüência de filtros digitais e a representação em freqüência da relação de dilatação. Iremos aqui mostrar como podemos aplicar os mesmos conceitos na representação de funções no domínio da freqüência.

Seja uma função  $f$  em  $L^2(\mathbf{R})$ . Podemos supor, sem perda alguma de generalidade, que esta função pode ser bem representada no subespaço  $V_0$ . Chamaremos aqui de  $f^0$  a representação de  $f$  em  $V_0$ , ou seja,  $f^0 = P_{V_0}f$ . Como, pela AMR, sabemos que  $V_{j+1} \subset V_j$ , e em particular,  $V_0 \subset V_{-1}$ , podemos também representar  $f$  em  $V_{-1}$ , sem perder informação alguma,  $f^0 = f^{-1}$ .

Tomemos então o seguinte conjunto de funções  $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  como base para o subespaço  $V_0$  e  $\{\phi_{1,k}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  como base para  $V_{-1}$ . As projeções  $f^0$  e  $f^{-1}$  podem ser representadas da seguinte forma

$$f^0 = \sum_k a_{0,k} \phi_{0,k} = \sum_k a_{0,k} \phi(t - k) \quad (234)$$

$$f^{-1} = \sum_k a_{-1,k} \phi_{-1,k} = \sum_k a_{-1,k} \phi(2t - k) . \quad (235)$$

Para obtermos a representação no domínio da frequência, tomemos a transformada de Fourier (definida em (5)) das equações acima

$$\hat{f}^0 = \sum_k a_{0,k} \hat{\phi}(\omega) e^{-i\omega k} \quad (236)$$

$$= \hat{\phi}(\omega) \sum_k a_{0,k} e^{-i\omega k} \quad (237)$$

$$= \hat{\phi}(\omega) A_0(\omega) \quad (238)$$

$$\hat{f}^{-1} = \sum_k a_{-1,k} \frac{\hat{\phi}}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}k} \quad (239)$$

$$= \frac{\hat{\phi}}{2} \sum_k a_{-1,k} e^{-i\frac{\omega}{2}k} \quad (240)$$

$$= \hat{\phi}(\omega) A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (241)$$

onde definimos

$$A_j(2^j\omega) = \sum_k a_{j,k} e^{-i2^j\omega k}. \quad (242)$$

A representação em frequência de uma função qualquer, nada mais é do que o produto entre a representação em frequência da função de base e a representação em frequência do filtro de coeficientes  $a_{j,k}$ .

Seja  $f^j$  a projeção de  $f$  em um subespaço  $V_j$ , teremos

$$f^j = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} \quad (243)$$

$$\hat{f}^j = \sum_k a_{j,k} \hat{\phi}_{j,k} \quad (244)$$

$$= \sum_k a_{j,k} \hat{\phi}(2^j\omega) e^{-i2^j\omega k} \quad (245)$$

$$= \hat{\phi}(2^j\omega) \sum_k a_{j,k} e^{-i2^j\omega k} \quad (246)$$

$$= \hat{\phi}(2^j\omega) A_j(2^j\omega). \quad (247)$$

Vejamos agora como é possível representar  $A_j$  em função de  $A_{j-1}$ . Para tanto, tomemos o exemplo de  $A_0$ , dado em (238), e  $A_{-1}$  em (241). Apliquemos a equação (80) a  $A_0$  e obteremos

$$A(\omega) = \sum_k \left( \sum_n h_n a_{-1,2k+n} \right) e^{-i\omega k} \quad (248)$$

$$= \sum_n h_n \sum_k a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k}, \quad (249)$$

fazendo a substituição  $m = 2k + n$ ,

$$A(\omega) = \sum_n h_n \sum_k a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k} \quad (250)$$

$$= \sum_n h_n \sum_m a_{-1,m} e^{-i\omega m/2} e^{i\omega n/2} \quad (251)$$

$$= \sum_n h_n A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega n/2} \quad (252)$$

$$= A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_n h_n e^{i\omega n/2} \quad (253)$$

$$= A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(-\frac{\omega}{2}\right) \quad (254)$$

Voltando agora na representação de  $f^0$  no domínio da frequência (238) e utilizando o resultado obtido acima (254), temos

$$\widehat{f}^0 = \widehat{\phi}(\omega) A(\omega) \quad (255)$$

$$= \widehat{\phi}(\omega) A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(-\frac{\omega}{2}\right) \quad (256)$$

$$= H\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(-\frac{\omega}{2}\right) \quad (257)$$

$$= \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(-\frac{\omega}{2}\right) \quad (258)$$

$$= |H\left(\frac{\omega}{2}\right)| e^{j\angle H(\omega/2)} |H\left(-\frac{\omega}{2}\right)| e^{j\angle H(-\omega/2)} \widehat{f}^{-1} \quad (259)$$

$$= |H\left(\frac{\omega}{2}\right)| |H\left(-\frac{\omega}{2}\right)| \widehat{f}^{-1} \quad (260)$$

$$= |H\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 \widehat{f}^{-1}, \quad (261)$$

onde empregamos que  $|H(\omega)|$  é uma função par, o que pode ser facilmente verificado pela própria definição de  $H(\omega)$  em (183). De maneira geral, teremos

$$\widehat{f}^j = |H\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 \widehat{f}^{j-1}. \quad (262)$$

Acabamos de obter uma relação entre a representação em frequência da projeção de uma função  $f$  em dois subespaços subseqüentes. Se conhecemos a transformada de Fourier da função em uma dada escala, e sabendo quais os coeficientes de escala, podemos obter a representação em frequência em uma escala subseqüente, basta para tanto utilizar a relação (261).

De maneira análoga podemos derivar a representação no domínio de Fourier dos detalhes perdidos ao se passar de uma resolução para a sua subseqüente. Como vimos, a ARM fornece a seguinte relação entre os subespaços subseqüentes  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ , de forma que sendo  $f^{-1} \in V_{-1}$  e  $f^0, \delta^0 \in W_0$ , temos a relação  $f^{-1} = f^0 + \delta^0$ . Mostramos acima como é possível obter  $\widehat{f}^0$  com base em  $\widehat{f}^{-1}$ . Mostraremos agora como obter  $\delta^0$ . Utilizando (81), podemos escrever  $\delta^0$  como

uma combinação linear de funções wavelet  $\psi_{j,k}$

$$\delta^0 = \sum_k d_{0,k} \psi_{0,k} . \quad (263)$$

Tomando a transformada de Fourier da equação acima, teremos

$$\widehat{\delta}^0 = \sum_k d_{0,k} \widehat{\psi}(\omega) e^{-i\omega k} \quad (264)$$

$$\widehat{\delta}^0 = \widehat{\psi}(\omega) \sum_k d_{0,k} e^{-i\omega k} \quad (265)$$

$$\widehat{\delta}^0 = \widehat{\psi}(\omega) D(\omega) , \quad (266)$$

onde definimos

$$D(\omega) = \sum_k d_{0,k} e^{-i\omega k} . \quad (267)$$

Utilizaremos agora (184) em (266),

$$\widehat{\delta}^0 = D(\omega) G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (268)$$

Os coeficientes de wavelet  $d_{j,k}$  são dados pela relação (84)

$$d_{0,k} = \sum_n \overline{g_n} a_{-1,2k+n} . \quad (269)$$

Substituindo em (267)

$$D(\omega) = \sum_k \sum_n g_n a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k} \quad (270)$$

$$= \sum_n g_n \sum_k a_{-1,2k+n} e^{-i\omega k} \quad (271)$$

e agora fazendo a substituição  $m = 2k + n$

$$D(\omega) = \sum_n g_n \sum_m a_{-1,m} e^{-i\omega(m-n)/2} \quad (272)$$

$$= \sum_n g_n \sum_m a_{-1,m} e^{-i\frac{\omega}{2}m} e^{i\frac{\omega}{2}n} \quad (273)$$

$$= \sum_n g_n A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\frac{\omega}{2}n} \quad (274)$$

$$= A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_n g_n e^{i\frac{\omega}{2}n} \quad (275)$$

$$= A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) G\left(-\frac{\omega}{2}\right) \quad (276)$$

O resultado obtido (276) pode agora ser utilizado em (277), obtendo, assim

$$\widehat{\delta}^0 = A_{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) G\left(-\frac{\omega}{2}\right) G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) . \quad (277)$$

Fazendo uso de (241) e do fato de  $|G(\omega)|$  ser uma função par, obtemos

$$\widehat{\delta}^0 = |G(\frac{\omega}{2})|^2 \widehat{f}^{-1}. \quad (278)$$

Se utilizarmos agora os resultados obtidos em (261) e (278) teremos o seguinte

$$\widehat{f}^{-1} = \widehat{\delta}^0 + \widehat{f}^0 \quad (279)$$

$$= |H(\frac{\omega}{2})|^2 \widehat{f}^{-1} + |G(\frac{\omega}{2})|^2 \widehat{f}^{-1} \quad (280)$$

$$= \widehat{f}^{-1} (|H(\frac{\omega}{2})|^2 + |G(\frac{\omega}{2})|^2), \quad (281)$$

ou seja,

$$|H(\frac{\omega}{2})|^2 + |G(\frac{\omega}{2})|^2 = 1 \quad (282)$$

## 11 Transformada Wavelet Contínua

Vamos aqui analisar alguns aspectos da transformada wavelet contínua já anteriormente introduzida em (3). Iremos sempre supor que  $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ , e além disso, a wavelet deve satisfazer a condição de admissibilidade também mencionada anteriormente em (4)

$$C_\psi = 2\pi \int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (283)$$

Essa condição assegura que  $\widehat{\psi}(0) = 0$  ou, equivalentemente,  $\int \psi(t) dt = 0$  deve ser satisfeito. Além disso, veremos posteriormente que esta condição assegura a convergência da representação de uma função qualquer em termos de sua transformada wavelet.

Uma família de funções  $\{\psi_{s,u}\}$  é gerada por dilatações e translações

$$\psi_{s,u}(t) = |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad (284)$$

onde  $s, u \in \mathbf{R}$ ,  $s \neq 0$  (note que não estamos aqui restringindo  $s$  como negativo ou positivo). Iremos também considerar  $\|\psi\| = 1$ . A transformada contínua wavelet, com relação à família dada acima é definida

$$W_c f(s, u) = (W_c f)(s, u) = \langle f, \psi_{s,u} \rangle \quad (285)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{s,u}(t)} dt \quad (286)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt. \quad (287)$$

Note que  $|W_c f(s, u)| \leq \|f\|$ .

A função  $f$  pode ser recuperada através da seguinte fórmula

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \psi_{s, u} ds du , \quad (288)$$

que iremos demonstrar a seguir. Para tanto, consideremos  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ , para as quais teremos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \overline{(W_c g)(s, u)} ds du = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \right\} \\ & \quad \overline{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t') |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t'-u}{s}\right) dt' \right\}} ds du = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\omega) |s|^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{\psi}(s\omega)} e^{-j\omega u} d\omega \right\} \\ & \quad \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(\omega') |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega') e^{j\omega' u} d\omega' \right\} ds du , \end{aligned} \quad (289)$$

onde utilizamos a identidade de Parseval (veja apendice A). Fazendo agora  $F_s(\omega) = |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(s\omega)}$  e  $G_s(\omega) = |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{g}(\omega) \widehat{\psi}(s\omega)$ , temos

$$(289) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int F_s(\omega) e^{-j\omega u} d\omega \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int G_s(\omega') e^{j\omega' u} d\omega' \right\} ds du \quad (290)$$

Os termos entre chaves podem ser vistos como  $(2\pi)^{-1/2}$  vezes a transformada de Fourier de  $F_s(\omega)$  e  $G_s(\omega)$ .

$$(290) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{F}_s(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\widehat{G}_s(u)} du ds \quad (291)$$

Aplicando mais uma vez o teorema de Parseval, teremos

$$(291) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} F_s(u) \overline{G_s(u)} du ds . \quad (292)$$

Substituindo agora  $F_s$  e  $G_s$

$$(292) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(u) \overline{\widehat{\psi}(su)} |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{g}(u) \widehat{\psi}(su) du ds = \quad (293)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} |s| \widehat{f}(u) \overline{\widehat{g}(u)} |\widehat{\psi}(su)|^2 du ds . \quad (294)$$

Pelo teorema de Fubini, a ordem de integração pode ser invertida, então

$$(294) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) \overline{\widehat{g}(u)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|} |\widehat{\psi}(su)|^2 ds \right) du = \quad (295)$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right) dt = \quad (296)$$

$$C_\psi \langle f, g \rangle . \quad (297)$$

Concluimos então que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \overline{(W_c g)(s, u)} ds du = C_\psi \langle f, g \rangle . \quad (298)$$

Podemos ler a fórmula (298) da seguinte maneira

$$C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \langle g, \psi_{s,u} \rangle ds du = \langle f, g \rangle \quad (299)$$

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} (W_c f)(s, u) \psi_{s,u} ds du . \quad (300)$$

Vemos aqui a importância da condição de admissibilidade imposta em (283). Esta condição deve ser satisfeita para que seja possível ter (300).

## 12 Transformada Wavelet Discreta

Para obtermos a transformada wavelet discreta, devemos restringir os valores de  $s$  e  $u$  em (284) um conjunto discreto de valores. Por conveniência, na discretização, iremos restringir  $s$  a assumir apenas valores positivos. Com tal restrição, a condição de admissibilidade em (283) tomará agora a seguinte forma

$$C_\psi = \int_0^\infty \omega^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega . \quad (301)$$

Vamos restringir  $s$  e  $u$  da seguinte forma:  $s = s_0^j$  e  $u = ku_0 s_0^j$ , onde  $j, k \in \mathbf{Z}$ .  $s_0$  e  $u_0$  são fixos, escolheremos  $s_0 \neq 1$  e  $u_0 > 0$ .  $b_0$  deve ser escolhido de forma que as funções  $\psi(t - ku_0)$  “cubram” todo o tempo. Para valores diferentes de  $j$  a “largura” da função  $s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t)$  é  $s_0^j$  vezes a largura de  $\psi(t)$  (usando a medida  $largura(f) = [\int t^2 |f(t)|^2 dt]^{1/2}$ , onde assumimos que  $\int t |f(t)|^2 dt = 0$ ), devemos então escolher  $u = ku_0 s_0^j$ , e assim garantiremos que as wavelets discretas na resolução  $j$  “cubrirão” o eixo do tempo da mesma forma que  $\psi(t - ku_0)$ . As wavelets discretas terão então a seguinte forma

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ku_0 s_0^j}{a_0^j}\right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - ku_0) . \quad (302)$$

Queremos representar uma função qualquer  $f$  em termos das funções wavelets discretas, através dos coeficientes  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ . Esta representação deve ser tal que esses coeficientes caracterizem completamente a função  $f$ , e ainda mais, a reconstrução de  $f$  a partir desses deve ser numericamente estável. Veremos que a escolha de  $\psi$  admissível e  $s_0$  e  $u_0$  apropriados garante a existência de  $\tilde{\psi}_{j,k}$  de forma que a reconstrução de  $f$  se dê da seguinte forma

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} \quad (303)$$

Para que os coeficientes caracterizem bem uma função  $f$  qualquer em  $L^2(\mathbf{R})$ , é necessário que estes determinem univocamente a função, ou seja, se temos  $\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle = \langle f_2, \psi_{j,k} \rangle$  para todos  $j, k \in \mathbf{Z}$ , então  $f_1 \equiv f_2$ , ou, de forma equivalente, se  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = 0$  para todos  $j, k \in \mathbf{Z}$ , então  $f = 0$ . Sendo isso satisfeito, teremos uma boa caracterização das funções em  $L^2(\mathbf{R})$  em termos dos coeficientes  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ . No entanto, queremos ir além, queremos que a representação de  $f$  em termo dos coeficientes seja tal que exista um algoritmo numericamente estável para reconstruir  $f$  a partir dos coeficientes  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ . Podemos ver esse processo de representação em termo dos coeficientes como um mapeamento de  $L^2(\mathbf{R})$  em  $l^2(\mathbf{Z})$ <sup>5</sup>. Queremos também que o espaço das seqüências possua uma topologia, de forma que seja possível garantir que se temos duas seqüências  $(\langle f_1, \psi_{j,k} \rangle)_{j,k \in \mathbf{Z}}$  e  $(\langle f_2, \psi_{j,k} \rangle)_{j,k \in \mathbf{Z}}$  e se estas estão “próximas”, então  $f_1$  e  $f_2$  também estão “próximos”. O espaço  $L^2(\mathbf{R})$  já possui uma topologia, por se tratar de um espaço de Hilbert. Vamos então escolher para  $l^2(\mathbf{Z})$  uma topologia similar, de forma que a distância entre duas seqüências,  $c^1 = (c_{j,k}^1)_{j,k \in \mathbf{Z}}$  e  $c^2 = (c_{j,k}^2)_{j,k \in \mathbf{Z}}$ , seja dada por

$$\|c^1 - c^2\|^2 = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |c_{j,k}^1 - c_{j,k}^2|^2. \quad (304)$$

Veremos que uma escolha adequada de  $\psi$  (uma função  $\psi$  que possua um decaimento considerável em tempo e frequência e possua média nula) e valores para as constantes de dilatação e translação tais que  $s_0 > 1$  e  $u_0 > 0$  garantem que

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (305)$$

Esta inequação garante que se uma dada função  $f$  for tal que seu módulo  $\|f\|^2$  for pequeno, então, sua representação em termos dos coeficientes de wavelets será tal que  $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$  também será pequeno.

Para termos estabilidade, será necessário que dado  $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$  pequeno, tenhamos  $\|f\|^2$  também pequeno. Em particular, deve existir  $\alpha < \infty$  tal que  $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 < 1$  implique em  $\|f\|^2 \leq \alpha$ . Tomando um  $f \in L^2(\mathbf{R})$  arbitrário,

<sup>5</sup> $l^2(\mathbf{Z})$  é o espaço das seqüências em que, dada uma seqüência  $\{c_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ , teremos  $\sum_i c_i < \infty$

podemos definir  $\tilde{f} = [\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2]^{-1/2} f$ . Para  $\tilde{f}$  definido desta forma, teremos  $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq 1$ , e então  $\|\tilde{f}\|^2 \leq \alpha$ . Mas isto significa que temos

$$[\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2]^{-1} \|f\|^2 \leq \alpha \quad (306)$$

ou, equivalentemente,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \quad (307)$$

onde  $A = \alpha^{-1} > 0$ . Se esta condição (307) for satisfeita para todo  $f$ , o critério de estabilidade será satisfeito.

Combinando as equações (305) e (307), teremos

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (308)$$

para todo  $f \in L^2(\mathbf{R})$ . Em outras palavras, o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$  constitui um frame.

### 13 Transformada Wavelet Discreta com Fator de Escala Qualquer

Conforme vimos na sessão 12, no caso da Transformada Discreta, iremos restringir os fatores de escala e translação. O fator de escala será da forma  $s = s_0^j$  onde  $j \in \mathbf{Z}$  e  $s_0$  deve ser tal que  $s_0 \neq 0$ . O fator de translação dependerá do fator de escala, da seguinte forma  $u = k u_0 s_0^j$ , onde  $b_0 > 0$  e  $k \in \mathbf{Z}$ . A transformada discreta de wavelets terá então a seguinte forma

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - k u_0 s_0^j}{s_0^j}\right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - k u_0). \quad (309)$$

Podemos seguir o mesmo desenvolvimento adotado na sessão 9 e derivar algumas propriedades no domínio da frequência. Usando o fato dos espaços gerados pelas funções serem espaços encaixantes, fato derivado das propriedades da análise em resoluções múltiplas, podemos usar  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  para escrever uma função qualquer em  $V_j$  ou em  $W_j$  como uma combinação linear de funções em  $V_{j+1}$ . A função escala  $\phi$  pode então ser escrita como uma combinação linear de funções  $\{\phi_{-1,\cdot}\}$ ,

$$\phi(x) = s_0^{1/2} \sum_k h_k \phi(s_0 x - k u_0). \quad (310)$$

Tal relação, no domínio da frequência é reescrita como

$$\hat{\phi}(\omega) = s_0^{1/2} \sum_k h_k \frac{1}{|s_0|} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right) e^{-j k u_0 \omega / s_0} \quad (311)$$

$$= s_0^{-1/2} \sum_k h_k \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right) e^{-j k u_0 \omega / s_0} \quad (312)$$

Podemos então definir

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-jku_0\omega} \quad (313)$$

e assim (312) pode ser reescrita na forma

$$\widehat{\phi}(\omega) = s_0^{-1/2} H\left(\frac{\omega}{s_0}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right). \quad (314)$$

Seguindo os mesmos passos, definiremos

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-jku_0\omega} \quad (315)$$

e a relação entre a wavelet e a função escala no domínio da frequência será dada por

$$\widehat{\psi}(\omega) = s_0^{-1/2} G\left(\frac{\omega}{s_0}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right). \quad (316)$$

Podemos derivar algumas propriedades sobre os filtros  $H$  e  $G$ , assim como foi feito na sessão 9, a equação (205) pode ser reescrita, no caso de uma fator escala qualquer, da seguinte forma

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |s_0^{-1/2} H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{s_0}\right)|^2 |\widehat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{s_0}\right)|^2 \quad (317)$$

$$= s_0^{-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |H(\omega' + \pi l)|^2 |\widehat{\phi}(\omega' + \pi l)|^2 = 1 \quad (318)$$

O algoritmo rápido para decomposição também pode ser derivado da mesma maneira em que foi derivado na sessão 6, tomemos para tanto a relação de uma função escala em um subespaço  $V_0$  reescrevendo-a na base de  $V_{-1}$

$$\phi(x) = \sum_k h_k \phi_{-1,k}(x) = \sum_k h_k s_0^{1/2} \phi(s_0 x - ku_0) \quad (319)$$

onde  $h_k = \langle f, \phi_{-1,k} \rangle$ . Consideremos a relação de escala e utilizemos o resultado de (319)

$$\phi_{m,n}(x) = s_0^{-m/2} \phi(s_0^{-m} x - nu_0) \quad (320)$$

$$= s_0^{-m/2} \sum_k h_k s_0^{1/2} \phi(s_0^{-(m-1)} x - (s_0 u_0 n - u_0 k)) \quad (321)$$

$$= \sum_k h_k \phi_{m-1, s_0 n - k}(x). \quad (322)$$

Como  $a_{m,n} = \langle f, \phi_{m,n} \rangle$ , reescrevemos a fórmula acima (322) e obtemos

$$a_{m,n} = \sum_k \overline{h_k} a_{m-1, s_0 n - k}, \quad (323)$$

o algoritmo rápido para obter os coeficientes de representação de uma função em uma escala a partir dos coeficientes da escala anterior. De maneira equivalente obtemos os coeficientes wavelets

$$d_{m,n} = \sum_k \bar{g}_k a_{m-1, s_0 n - k}. \quad (324)$$

Note que assim como anteriormente, a operação de mudança de escala pode ser vista como uma convolução do sinal com um filtro e uma subsequente decimação. No caso em questão a decimação será de fator igual a  $s_0$ . Se este for um número inteiro, não haverá maiores problemas e poderemos facilmente implementar o algoritmo rápido em (323) e (324). No entanto, caso  $s_0$  não seja inteiro, será necessário adotar uma outra abordagem. (17; 16; 5; 9)

A decimação de um sinal  $x$  por fator qualquer  $M$  é dada

$$v = (\downarrow M)x \quad (325)$$

$$v(k) = x(Mk). \quad (326)$$

Generalizando o resultado de sessão 8 podemos derivar a relação de decimação para o domínio da frequência. Façamos então

$$V(\omega) = \sum_k v(k)e^{-j\omega k} = \sum_k x(Mk)e^{-j\omega k} = \sum_n x(n)e^{-j\frac{\omega}{M}n} \quad (327)$$

O somatório em  $n$  é apenas para  $n$  da forma  $Mk$ , ou seja, não para todos os valores de  $n$ . Façamos então

$$A(\omega) = \sum_{\substack{k \\ k = Mn}} b(k)e^{-j\omega k} \quad (328)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\text{todo } k} b(k)e^{-j\omega k} + \frac{1}{M} \sum_{\text{todo } k} b(k)e^{-j(\omega + \frac{2\pi}{M})k} + \quad (329)$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_{\text{todo } k} b(k)e^{-j(\omega + \frac{4\pi}{M})k} + \dots + \quad (330)$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_{\text{todo } k} b(k)e^{-j(\omega + \frac{(M-1)2\pi}{M})k} \quad (331)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_k b(k)e^{-j(\omega + \frac{2\pi i}{M})k} \quad (332)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} B(\omega + \frac{2\pi i}{M}) \quad (333)$$

Utilizando a relação obtida em (333) em (327), teremos

$$V(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi i}{M}\right) \quad (334)$$

Podemos também generalizar o resultado para uma interpolação por um fator  $M$ , dada

$$u = (\uparrow M)v = \begin{cases} u(Mk) = v(k) \\ u(nk) = 0, \quad n < M \end{cases} \quad (335)$$

Podemos então verificar quais as conseqüências dessa interpolação no domínio da freqüência

$$U(\omega) = \sum_n u(n)e^{-j\omega n} \quad (336)$$

$$= \sum_{n= Mk} u(n)e^{-j\omega n} \quad (337)$$

$$= \sum_k u(Mk)e^{-j\omega Mk} \quad (338)$$

$$= \sum_k v(k)e^{-jM\omega k} \quad (339)$$

$$= V(M\omega) \quad (340)$$

No caso em que o fator de decimação  $M$  for um número fracionário, da forma  $M = P/Q$ , poderemos escrever  $(\downarrow M)$  da seguinte forma

$$(\downarrow M) = (\downarrow P)(\uparrow Q). \quad (341)$$

Dado um sinal  $x$  e  $v$  obtido pela decimação de  $x$

$$v = (\downarrow M)x = (\downarrow P)(\uparrow Q)x \quad (342)$$

podemos obter a representação na freqüência, bastando para tanto tomar os resultados de (333) e (340).

$$V(\omega) = (\downarrow P)(X(Q\omega)) = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{P-1} X\left(\frac{Q\omega}{P} + \frac{2\pi i}{P}\right) \quad (343)$$

Consideremos agora o caso prático em que temos um banco de filtros onde o sinal é filtrado por um filtro  $h$  e em seguida decimado, sendo esse processo repetido várias vezes. Em algum momento teremos um sinal  $v$  que poderemos dizer ser a versão decimada por um fator  $M$  de um sinal  $v'$ . O sinal  $v$ , por sua vez, será filtrado por  $h$  e subsequentemente decimado pelo mesmo fator  $M$ , ou seja,  $y = h * v$ . No domínio da freqüência podemos representar essas operações da seguinte forma

$$Y(\omega) = H(\omega)V(\omega) , \quad (344)$$

mas sabemos que  $v = (\downarrow M)v'$ , e por tanto,

$$V(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} V'(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi i}{M}). \quad (345)$$

Aplicando (345) em (344) obtemos

$$Y(\omega) = H(\omega) \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} V'(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi i}{M}) \quad (346)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} H(\omega + 2\pi i) V'(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi i}{M}) \quad (347)$$

$$= (\downarrow M)(H(M\omega)V'(\omega)) \quad (348)$$

Ou seja, podemos postergar a decimação, bastando para tanto escalar o filtro pelo fator de decimação. No domínio do tempo teremos

$$y = (\downarrow M)[((\uparrow M)h) * v']. \quad (349)$$

Ambas relações, (348) e (349), são válidas para o caso em que  $M$  é da forma  $M = P/Q$ , o que pode ser facilmente verificado.

No caso em que  $M = P/Q$  a relação (341) será válida, e assim podemos aplicá-la a (349)

$$y = (\downarrow P)(\uparrow Q)[((\downarrow Q)(\uparrow P)h) * v']. \quad (350)$$

Neste momento é interessante desvencilhar-mos do possível problema com a decimação do filtro  $h$ , para tanto buscaremos generalizar o resultado obtido em (134), mostrando assim que  $(\downarrow M)h * v$  é equivalente a  $h * (\uparrow M)v$ . Vamos escrever então a primeira relação no domínio da frequência, fazendo o uso de (334)

$$((\downarrow M)H(\omega))V(\omega) = [\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} H(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi i}{M})]V(\omega) \quad (351)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} H(\omega + 2\pi i)V(M\omega) \quad (352)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} H(\omega)V(M\omega) \quad (353)$$

$$= H(\omega)V(M\omega) \quad (354)$$

$$= H(\omega)((\uparrow M)V(\omega)) \quad (355)$$

Poderemos então aplicar a relação obtida (355) à (350), obtendo assim

$$y = (\downarrow P)(\uparrow Q)[((\downarrow Q)(\uparrow P)h) * v'] = (\downarrow P)(\uparrow Q)[((\uparrow P)h) * (\uparrow Q)v']. \quad (356)$$

## 14 Fator de Escala Inteiro Maior que Dois

Um esquema de análise utilizando uma fato de escala inteiro  $N$  maior que 2, em geral, possui uma função escala  $\phi$  e  $N - 1$  diferentes funções wavelets  $\psi^l$ ,  $l = 1, 2, \dots, N - 1$ . A função escala deve satisfazer uma relação de escala e translação da forma

$$\phi(x) = \sum_n c_n \phi(Nx - n), \quad (357)$$

que, sob o ponto de vista da frequência, é expressa como

$$\widehat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{N}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad (358)$$

onde

$$m_0(\omega) = \frac{1}{N} \sum_n c_n e^{in\omega}. \quad (359)$$

Sob a ótica da análise em resoluções múltiplas, cada subespaço gerado pelas funções escala será subsequentemente decomposto em um espaço de baixa resolução mais  $N - 1$  espaços de detalhes associados às  $N - 1$  wavelets. Ou seja, dado um  $\tilde{V}_{j-1}$  qualquer, este será decomposto em  $\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j^1 \oplus \tilde{W}_j^2 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_j^{N-1}$ . Fica óbvio então que  $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j^1, \dots, \tilde{W}_j^{N-1} \subset \tilde{V}_{j-1}$ . Desta forma, todas as wavelets  $\psi^l$  podem ser escritas como uma combinação linear de  $\phi(Nx - n)$ ,

$$\psi^l(x) = \sum_n g_n^l \phi(Nx - n). \quad (360)$$

No domínio de Fourier, temos

$$\widehat{\psi}^l(\omega) = \sum_n g_n^l \frac{1}{N} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right) e^{-j\frac{\omega}{N}n} \quad (361)$$

$$= \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right) m_l\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad (362)$$

onde é definido

$$m_l(\omega) = \frac{1}{N} \sum_n g_n^l e^{-j\omega n}. \quad (363)$$

Se assumirmos que  $\phi$  e  $\psi^l$  possuem suporte compacto, então  $m_0$  e  $m_l$  serão polinômios.

Queremos mostrar a ortonormalidade nos diferentes subespaços, faremos então um desenvolvimento análogo ao que foi feito na sessão 9. Para que tenhamos a ortonormalidade entre as funções da família  $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  exigiremos que  $\langle \phi(x), \phi(x - n) \rangle = \delta_{o,n}$ . Seguindo os mesmos passos em (186) a (192), teremos

$$\langle \phi(x), \phi(x - n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (364)$$

onde definimos

$$A(\omega) = |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2. \quad (365)$$

A escolha que garante a ortogonalidade é

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) = 1, \quad (366)$$

pois

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\omega n} = \delta_{o,n}. \quad (367)$$

Tal escolha se reflete em  $m_0$  da seguinte forma, usando  $\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\frac{\omega}{N})m_0(\frac{\omega}{N})$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1 \quad (368)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + \frac{2\pi l}{N})|^2 |m_0(\omega + \frac{2\pi l}{N})|^2 = 1 \quad (369)$$

Separando nas várias fases,  $l = Nk, l = Nk + 1, \dots, l = Nk + N - 1$ , teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 |m_0(\omega + 2\pi k)|^2 + \\ &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi}{N})|^2 |m_0(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi}{N})|^2 + \dots + \\ &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi(N-1)}{N})|^2 |m_0(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi(N-1)}{N})|^2 \end{aligned} \quad (370)$$

$$1 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 |m_0(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 \quad (371)$$

Como  $m_0$  é periódico com período  $2\pi$ , podemos fazer a seguinte simplificação

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 |m_0(\omega + \frac{2\pi i}{N})|^2 \\ 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} |m_0(\omega + \frac{2\pi i}{N})|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 \\ 1 &= \sum_{i=0}^{N-1} |m_0(\omega + \frac{2\pi i}{N})|^2, \end{aligned} \quad (372)$$

o que é a condição de ortonormalidade sobre  $m_0$ .

Para que cada uma das famílias  $\{\psi^l(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ ,  $l = 1, \dots, N-1$ , seja ortonormal, iremos exigir que  $\langle \psi^l, \psi^l(x-n) \rangle = \delta(n)$ . De forma semelhante ao desenvolvimento anterior, escolheremos

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + \frac{2\pi l}{N})|^2 |m_l(\omega + \frac{2\pi l}{N})|^2 = 1. \quad (373)$$

Usando agora  $\hat{\psi}^l(\omega) = \hat{\phi}(\frac{\omega}{N})m_l(\frac{\omega}{N})$  e fazendo a separação nas diversas fases, chegaremos à seguinte conclusão

$$\sum_{i=0}^{N-1} |m_l(\omega + \frac{2\pi i}{N})|^2 = 1, \quad l = 1, \dots, N-1. \quad (374)$$

Devemos, além de exigir a ortonormalidade dentro uma família, exigir a ortogonalidade entre famílias diferentes, para que assim os subespaços  $\tilde{V}_j$  e  $\tilde{W}_j^l$  sejam ortogonais entre si, e também para que os subespaços  $\tilde{W}_j^l$  e  $\tilde{W}_j^{l'}$  sejam ortogonais se  $l \neq l'$ . Para termos ortogonalidade entre  $\tilde{V}_j$  e  $\tilde{W}_j^l$  é necessário que

$$\begin{aligned} \langle \phi(x), \psi^l(x-n) \rangle &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\psi^l(x-n)} dx &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\psi}^l(\omega)} e^{i\omega n} d\omega &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\psi}^l(\omega + 2\pi l)} e^{i\omega n} d\omega &= 0, \end{aligned} \quad (375)$$

e por tanto, devemos escolher

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\psi}^l(\omega + 2\pi l)} = 0. \quad (376)$$

Escrevendo  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\psi}^l$  em função de  $m_0$  e  $m_l$ , teremos

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + \frac{2\pi l}{N}) m_0(\omega + \frac{2\pi l}{N}) \overline{\hat{\phi}(\omega + \frac{2\pi l}{N}) m_l(\omega + \frac{2\pi l}{N})} &= 0 \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + \frac{2\pi l}{N})|^2 m_0(\omega + \frac{2\pi l}{N}) \overline{m_l(\omega + \frac{2\pi l}{N})} &= 0. \end{aligned} \quad (377)$$

Separando as fases, teremos

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 m_0(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N}) \overline{m_l(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})} = 0 \quad (378)$$

mas  $m_0$  e  $m_l$  sãp peri3dicos de peri3do  $2\pi$  e por tanto podemos reduzir a equa33o acima a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 m_0(\omega + \frac{2\pi i}{N}) \overline{m_l(\omega + \frac{2\pi i}{N})} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} m_0(\omega + \frac{2\pi i}{N}) \overline{m_l(\omega + \frac{2\pi i}{N})} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi k + \frac{2\pi i}{N})|^2 &= 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} m_0(\omega + \frac{2\pi i}{N}) \overline{m_l(\omega + \frac{2\pi i}{N})} &= 0. \end{aligned} \quad (379)$$

A ortogonalidade entre  $\psi^l$  e  $\psi^{l'}$ ,  $l \neq l'$ , nos levar3, atrav3s de passos muito semelhantes aos anteriores 3 seguinte condi33o que deve ser satisfeita entre  $m_l$  e  $m_{l'}$

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_l(\omega + \frac{2\pi i}{N}) \overline{m_{l'}(\omega + \frac{2\pi i}{N})} = 0. \quad (380)$$

Analisando as condi33es (372), (374), (379) e (380) podemos concluir que a ortonormalidade dos diferentes subespa3os na an3lise em resolu33es m3ltiplas implica me que a matrix  $N \times N$ ,  $M(\omega)$ , com elementos da forma

$$M_{l,k}(\omega) = m_{l-1}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}(k-1)\right), \quad (381)$$

3 unit3ria para todo  $\omega$ , ou sejam, a inversa de  $M$  3 a transposta complexa conjugada de  $M$ ,  $M^{-1} = M^*$ . As linhas de  $M$  s3o bases unit3rias, isto 3, cada linha possui tamanho unit3rio e produto interno Hermitiano nulo. De forma similar, as colunas tamb3m s3o bases unit3rias. Na verdade, se tomarmos uma base unit3ria, a matriz cujas linhas ou colunas for essa base ser3 uma matriz unit3ria.

Tendo em vista os elementos da matriz  $M$  em (381), podemos reescrev3-la como um produto de duas matrizes

$$M(\omega) = GE(\omega), \quad (382)$$

onde os elementos de tais matrizes s3o dados por

$$G_{l,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} g_k^l, \quad (383)$$

$$E_{l,k}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{il(\omega + \frac{2k\pi}{N})} \quad (384)$$

para  $l = 0, 1, \dots, M-1$  e  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . A matriz  $E$  est3 completamente definida acima (384), para projetar a matriz  $M$  3 necess3rio ent3o apenas especificar os coeficientes dos filtros na matriz  $G$ .

Através de uma simples análise é fácil constatar que a matriz  $E$  é de fato uma matriz unitária. Qualquer elemento do produto  $E(\omega)E^*(\omega)$  pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 e^{il(\omega + \frac{2k\pi}{N})} e^{-il(\omega + \frac{2k\pi}{N})} = 1, \quad (385)$$

e por tanto a matriz  $E$  é unitária.

Para termos a condição de ortogonalidade entre os subespaços, como vimos acima, é necessário que a matriz  $M$  seja unitária, ou seja,  $M(\omega)M^*(\omega) = I$ , mas, temos também

$$\begin{aligned} M(\omega)M^*(\omega) &= (GE(\omega))(GE(\omega))^* \\ &= GE(\omega)E^*(\omega)G^* \\ &= GG^* = I, \end{aligned} \quad (386)$$

onde usamos o fato de  $E$  ser também unitária. Concluimos assim que impor que a matriz  $M$  seja unitária, é equivalente a impor que uma matriz  $G$  seja também unitária. O projeto de bancos de filtros resume-se então a achar uma matriz  $G$  unitária.

No caso em que a matriz  $G$  é  $2 \times 2$ , podemos escrevê-la como

$$G_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} p & t \\ q & u \end{bmatrix}. \quad (387)$$

Para que a matriz  $G_{2 \times 2}$  seja unitária serão necessárias que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$p\bar{p} + t\bar{t} = 1 \quad (388)$$

$$q\bar{q} + u\bar{u} = 1 \quad (389)$$

$$p\bar{q} + t\bar{u} = 0. \quad (390)$$

Uma possível escolha que satisfaz as condições (389) a (390) é a seguinte:  $p = e^{i\theta}/\sqrt{2}$ ,  $q = e^{-i\theta}/\sqrt{2}$  e  $t = -q$ ,  $u = p$  ou  $t = q$ ,  $u = -p$ . No primeiro caso, se os coeficientes forem reais e  $\theta = \pi/4$ , então teremos o caso equivalente a wavelet de Haar. As matrizes  $2 \times 2$  propostas, podem ser vistas como matrizes de rotação, no caso de Haar, teríamos uma rotação de um ângulo  $\pi/4$ .

Se tomarmos agora o caso em que  $G$  é  $n \times n$ , podemos tomar como exemplo as matrizes ortogonais que promovem as transformações de Householder. No espaço tridimensional, tal transformação é uma reflexão de um vetor em um plano. Em espaço euclidianos genéricos, é uma transformação linear que descreve uma reflexão num hiperplano que contenha a origem. Para obter a matriz da transformação basta tomar um vetor não nulo qualquer  $\mathbf{v}$  e obter a matriz da seguinte forma

$$Q = I - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}. \quad (391)$$

Desta forma, o numerador em (391) é uma matriz simétrica enquanto o denominador é o quadrado da magnitude de  $\mathbf{v}$ . Isto será uma reflexão em um

hiperplano perpendicular a  $\mathbf{v}$ . No caso em que  $\mathbf{v}$  for um vetor unitário, basta fazer  $= I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ . Qualquer matriz ortogonal de tamanho  $n \times n$  pode ser construída com um produto de não mais que  $n$  matrizes de reflexão de Householder.

## 15 Fatores de Escala Não-Inteiros

Uma das maneiras se obtermos uma melhor resolução em frequência é tomando fatores de escala menores que o usualmente escolhido fator de escala dois. Obviamente o fator de escala deve ser maior que um, e por tanto, queremos um fator de escala no intervalo aberto  $]1, 2[$ .

É possível existir bases ortonormais de wavelets para fatores de dilatação racional, como mostrado em (3). No entanto não é possível estabelecer uma análise em resoluções múltiplas (ARM) com funções  $\phi$  e  $\psi$  de suporte compacto. Suponhamos que o fator de escala seja  $p/q$  onde  $p$  e  $q$  são inteiros. Se levantarmos a hipótese de que a ARM é válida, então teremos  $V_0 \subset V_{-1}$ , e existem então duas seqüências  $(c_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $(c_{2,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ , tais que

$$\phi(x) = \sum_n c_{1,n} \phi\left(\frac{p}{q}x - n\right), \quad (392)$$

$$\phi(x-1) = \sum_n c_{2,n} \phi\left(\frac{p}{q}x - n\right). \quad (393)$$

As equações em (393) podem ser reescritas da seguinte forma, tomando a transformada de Fourier e manipulando alguns termos

$$\frac{p}{q} \widehat{\phi}\left(\frac{p}{q}\omega\right) = \left(\sum_n c_{1,n} e^{jn\omega}\right) \widehat{\phi}(\omega), \quad (394)$$

$$\frac{p}{q} \widehat{\phi}\left(\frac{p}{q}\omega\right) = e^{jp\omega/q} \left(\sum_n c_{2,n} e^{jn\omega}\right) \widehat{\phi}(\omega). \quad (395)$$

Isto implica em

$$\sum_n c_{1,n} e^{jn\omega} = e^{jp\omega/q} \sum_n c_{2,n} e^{jn\omega}. \quad (396)$$

Mas, se assumimos que as funções  $\phi$  e  $\psi$  possuem suporte compacto, então as seqüências  $(c_{1,n})$  e  $(c_{2,n})$  devem ser necessariamente finitas. Se ambas são finitas, então na igualdade (396) temos polinômios em ambos os lados, e por tanto a igualdade é falsa. Não é possível gerar um termo de frequência fracionária, à direita, com um número finito de termos de frequências inteiras, à esquerda. Em aplicações práticas devemos trabalhar com um número sempre finito de coeficientes, para tanto devemos truncar a série em algum ponto, o que gerará erro no resultado final.

Restringindo a análise à fatores racionais da forma  $p/q$ . Estaremos nesse caso lidando com bancos de filtros com mudança no fator de amostragem por uma fator  $p_i/q_i$  em cada um dos braços. Interessante notar que, para que a

densidade de amostras se mantenha a mesma ao longo do banco é necessário que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{q_i}{p_i} = 1, \quad (397)$$

onde  $N$  é o número de braços no banco de filtros. A condição (397) é a condição de taxa de amostragem crítica.

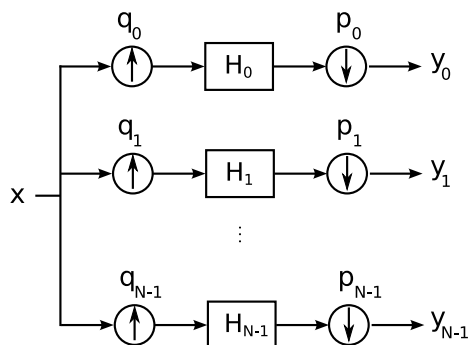


Figura 25: Banco de Filtros com Decimação Racional.

O banco de filtros esquematizado na figura 25 é um artefato que separa o sinal em  $M$  canais através de filtragem e decimação por fatores da forma  $p_i/q_i$ . O  $i$ -ésimo canal do banco de filtros contém as frequências na faixa

$$\left[ \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_k} \right) \pi, \left( \sum_{k=0}^i \frac{p_k}{q_k} \right) \pi \right] \quad (398)$$

No caso em que os bancos de filtros possuem dois ramos, teremos então uma interpolação por um fator  $q$  e outra por um fator  $p - q$ , e uma decimação pelo fator  $p$  em ambos os ramos. O esquema do banco de filtros está representado na figura 26. Dado um banco de filtros de análise em duas bandas conforme o proposto, é necessário projetar os filtros FIR para análise e síntese. Uma abordagem analítica de como o fazer é descrita em (15) e uma abordagem numérica pode ser vista em (23).

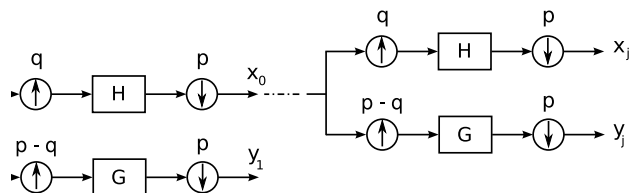


Figura 26: Banco de Filtros Iterativo com Decimação Racional.

Para obtemos uma análise racional devemos claramente, em cada ramo, ter uma interpolação ou decimação por um fator racional. Se assumirmos que um sinal  $x(t)$  é limitado em frequência, então este pode ser reconstruído sem erro a partir das suas amostras  $x(n\tau)$ , para tanto usando a relação de Nyquist  $x(t) = \sum_k x(k\tau)\chi(t/\tau - k)$  onde  $\chi(t) = \text{sen}(\pi t)/(\pi t)$ . Mudar o período de amostragem de  $\tau$  para  $p\tau/q$  fornece então

$$x\left(\frac{p}{q}n\tau\right) = \sum_k x(k\tau)\chi\left(\frac{np - kq}{q}\right) \quad (399)$$

A equação acima apenas estabelece que para se obter as amostras em instantes de amostragem da forma  $p/qn\tau$  é necessário primeiramente realizar uma interpolação (upsample) por um fator  $q$ , posteriormente filtrar pelo filtro passa-baixas  $G(z) = \sum_k \chi(k/q)z^{-k}$ , e finalmente realizar uma decimação (downsample) por um fator  $p$ . Teremos desta forma

$$y[n] = \sum_k g[np - kq]x[k]. \quad (400)$$

Vejamos um exemplo direto, a implementação de um banco de filtros com fatores de conversão da taxa de amostragem  $2/3$  e  $1/3$ , conforme esquematizado na figura 27. Como podemos observar na figura 28, através da análise

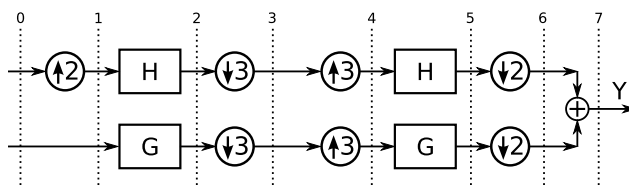


Figura 27: Banco de Filtros com fatores  $2/3$  e  $1/3$ .

da informação espectral do sinal ao longo do banco, que a reconstrução perfeita é atingida na condição de se utilizar filtros ideais (com coeficientes reais). Em alguns casos é possível obter a reconstrução perfeita, embora exista um embaralhamento em frequência (17).

## 16 Particionamento do Subespaço com mais de uma wavelet

Como mostrado no artigo de A. Cohen e I. Daubechies (??) e também na sessão 15, fatores de dilatação não inteiros não podem gerar uma análise em resoluções múltiplas com funções escala de suporte compacto. Uma segunda alternativa para se obter uma melhor resolução em frequência é utilizar mais de um espaço de detalhes, ou seja, se temos um fator de dilatação  $N$ , utiliza-se então uma função escala  $\phi$  e  $N - 1$  diferentes wavelets  $\psi_l$ ,  $l = 1, \dots, N - 1$ . Tais funções

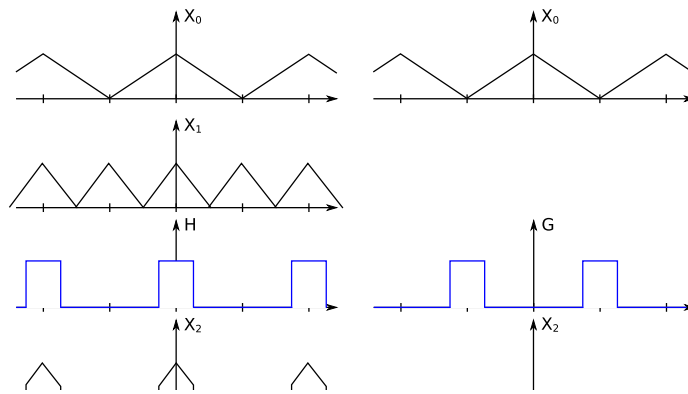


Figura 28: Análise espectral do sinal ao longo do Banco de Filtros.

devem satisfazer relações de escala semelhantes  $\phi(x) = \sum_n c_n \phi(Nx - n)$ , ou equivalentemente, na frequência,  $\widehat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/N) \widehat{\phi}(\omega/N)$ , onde assumimos aqui  $m_0(\omega) = N^{-1} \sum_n c_n e^{i\omega n}$ . As diferentes  $\psi_l$  podem ser escritas como combinação linear de  $\phi(Nx - n)$ . Existe, no entanto, polinômios trigonométricos  $m_l$  de forma tal que  $\widehat{\psi}_l(\omega) = m_l(\omega/N) \widehat{\phi}(\omega/N)$ . Para que  $m_l$  sejam de fato polinômios, é necessário assumir suporte compacto das funções  $\phi$  e  $\psi_l$ . Para que tenhamos ortonormalidade nos diferentes subespaços na análise em resoluções múltiplas é necessário que a matriz  $N \times N$ ,  $M(\omega)$ , cujos elementos são da forma

$$M_{lk}(\omega) = m_{l-1}(\omega + \frac{2\pi}{N}(k-1)), \quad (401)$$

seja unitária para todo  $\omega$ , ou seja, a transposta conjugada de  $M$  é a própria inversa.

Para um valor de  $N$  qualquer, a mudança de um subespaço  $V_j$  para um subespaço de resolução mais grosseira  $V_{j+1}$ , corresponde à salto de  $\log_2 N$  oitavas em frequência, já que o fator de dilatação entre as duas resoluções é  $N$ . Cada uma das wavelets  $\psi_l$  corresponde então, em média, a uma largura de banda de  $(N-1)^{-1} \log_2 N$ . Para  $N=4$ , por exemplo, teríamos 3 wavelets para duas oitavas, correspondendo a uma média de  $\frac{2}{3}$  oitavas por wavelet, o que é melhor que a relação de uma oitava por wavelet obtida com  $N=2$ .

No artigo de A.. Cohen e I. Daubechies (??), ilustra-se um processo de construção de uma base wavelet com fator de dilatação 4, dada uma base ortonormal wavelet para o fator de dilatação 2. Para tanto referenciaremos as wavelets com fator de escala 4 com um til sobre as letras e as sem o til serão utilizadas para designar aquelas cujo fator de escala é 2. Os polinômios trigonométricos pode então ser dados

$$\tilde{m}_0(\omega) = m_0(\omega)m_0(2\omega), \quad (402)$$

$$\tilde{m}_1(\omega) = m_0(\omega)m_1(2\omega), \quad (403)$$

$$\tilde{m}_2(\omega) = m_1(\omega)m_1(2\omega), \quad (404)$$

$$\tilde{m}_3(\omega) = m_1(\omega)m_0(2\omega), \quad (405)$$

onde  $m_1(\omega) = e^{i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)}$  e  $m_0(\omega)$  é um polinômio trigonométrico associado a uma base ortonormal wavelet com  $N=2$ .

Um banco de filtros para o esquema de decomposição proposto acima é ilustrado na figura 29. O banco é constituído por quatro ramos, mas como o fator de decimação é 4, a densidade de amostras ao longo do banco é mantida constantes.

Tomando o caso mais simples, teremos  $m_0(\omega) = (1 + e^{-i\omega})$ , o que nos dá as wavelets de Haar. Para tal escolha de  $m_0$ ,  $m_1$  será dado por  $m_1(\omega) = e^{i\omega}(1 - e^{i\omega})$ . Os coeficientes para  $m_0$  são sabidamente  $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$  e para  $m_1$  são  $[\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$ . Podemos facilmente calcular os coeficientes para  $\tilde{m}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Teremos respectivamente:  $[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$ ,  $[1/2, 1/2, -1/2, -1/2]$ ,  $[1/2, -1/2, -1/2, 1/2]$ ,  $[1/2, -1/2, 1/2, -1/2]$ . A matriz de coeficientes  $M_c$

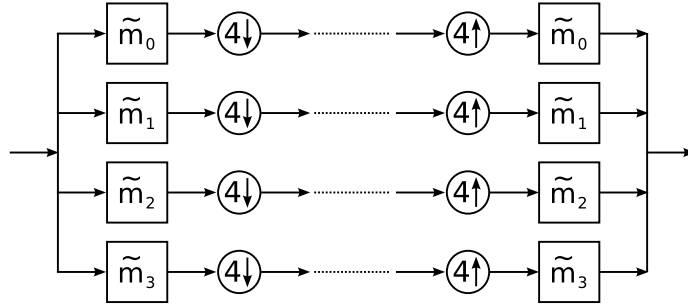


Figura 29: Banco de Filtros com fator de escala 4.

pode ser dada então

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad (406)$$

e os polinômios trigonométricos para o caso em questão serão dados por

$$\tilde{m}_0(\omega) = 1 + e^{-i\omega} + e^{-i2\omega} + e^{-i3\omega}, \quad (407)$$

$$\tilde{m}_1(\omega) = e^{i\omega} + e^{i2\omega} - e^{i3\omega} - e^{i4\omega}, \quad (408)$$

$$\tilde{m}_2(\omega) = e^{i3\omega} - e^{i4\omega} - e^{i5\omega} + e^{i6\omega}, \quad (409)$$

$$\tilde{m}_3(\omega) = -1 + e^{i\omega} + e^{-i\omega} - e^{i2\omega}. \quad (410)$$

As respostas em frequências dos filtros acima especificados, nas equações (407) a (410), são graficamente ilustradas na figuras 30, 31, 32 e 33, respectivamente.

É fácil verificar que filtros da forma especificada em (405) fazem com que a matriz  $M$  dada em (401) seja de fato unitária.

A função  $\tilde{\phi}$  correspondente ao filtro  $\tilde{m}_0$  pode ser dada por

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(4^{-j}\omega) \quad (411)$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} [m_0(2^{-2j}\omega)m_0(2^{-2j+1}\omega)] \quad (412)$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) = \hat{\phi}(\omega), \quad (413)$$

ou seja,  $\tilde{\phi} \equiv \phi$ . As funções de base dos subespaços  $\tilde{\phi}$  são equivalentes às funções de base  $\phi$ , isso significa que o espaço gerado pelas primeiras funções é equivalente ao subespaço das segundas, ou seja,  $\tilde{V}_0 = V_0$ . Seguindo o mesmo princípio, os

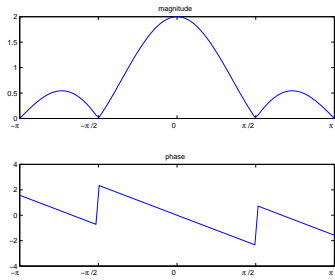


Figura 30: Resposta em Freqüência do Filtro  $\tilde{m}_0$ .

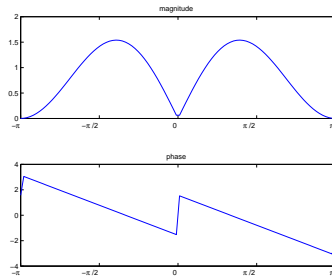


Figura 31: Resposta em Freqüência do Filtro  $\tilde{m}_1$ .

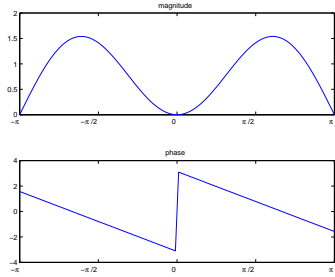


Figura 32: Resposta em Freqüência do Filtro  $\tilde{m}_2$ .

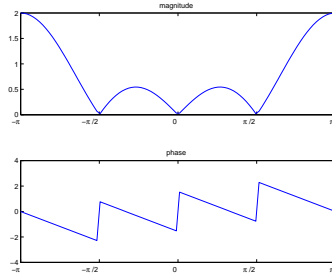


Figura 33: Resposta em Freqüência do Filtro  $\tilde{m}_3$ .

espaços  $\tilde{V}_j$  gerados por funções  $\tilde{\phi}(4^{-j}x - k)$  são equivalentes a subespaços  $V_m$  onde o índice  $m$  é um número par, tendo então  $\tilde{V}_j = V_{2j}$ .

As funções wavelets  $\tilde{\psi}^l$ ,  $l = 1, 2, 3$  são dadas por

$$\tilde{\psi}^l(\omega) = \widehat{m}_l\left(\frac{\omega}{4}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad (414)$$

em particular,

$$\widehat{\tilde{\psi}}^1(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)m_0\left(\frac{\omega}{4}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad (415)$$

$$= m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \widehat{\psi}(\omega), \quad (416)$$

então  $\tilde{\psi}^1 \equiv \psi$ . Como a função  $\psi$  é em essência uma função de banda de oitava, assim também será  $\tilde{\psi}$ , por conseguinte. Este fato mostra que a primeira suposição de que a largura de banda média por wavelet fosse de  $\frac{2}{3}$  de oitava era, em verdade, ingênua e errônea. A função  $\tilde{\psi}^1$  possui a mesma localização em freqüência que a função  $\psi$ . Por outro lado, as duas wavelets remanescentes,  $\tilde{\psi}^2$  e  $\tilde{\psi}^3$ , que não estavam presentes no caso do fator de escala 2, possuem sim uma melhor localização em freqüência. As duas, juntas, são responsáveis por uma oitava, o que nos leva a crer que sejam de funções de largura de banda de  $\frac{1}{2}$  oitava aproximadamente, mas com certeza, menor que uma oitava.

As funções  $\tilde{\psi}^2$  e  $\tilde{\psi}^3$  geram espaços  $\tilde{W}_j^2$  e  $\tilde{W}_j^3$  que juntamente com  $\tilde{W}_j^1 = W_{2j}$  complementam  $\tilde{V}_j = V_{2j}$  em relação a  $\tilde{V}_{j-1} = V_{2j-2}$ ,

$$\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j^1 \oplus \tilde{W}_j^2 \oplus \tilde{W}_j^3 \quad (417)$$

$$V_{2j-2} = V_{2j} \oplus W_{2j} \oplus \tilde{W}_j^2 \oplus \tilde{W}_j^3 \quad (418)$$

Como  $V_{2j} \oplus W_{2j} = V_{2j-1}$ , segue que  $\tilde{W}_j^2 \oplus \tilde{W}_j^3 = W_{2j-1}$ . Todo subespaço da forma  $W_{2j-1}$ , de índice ímpar, será dividido em dois subespaços de aproximadamente  $\frac{1}{2}$  banda de oitava.

## 17 Matriz Polifásica Para Conversão Racional da Taxa de Amostragem

Os sistemas mais simples com multiplas taxas de amostragem são aquele composto por um simples decimador  $M : 1$ , preserva uma a cada  $M$  amostras, descartando as demais, ou aquele constituído por um único interpolador  $1 : L$ , acrescentando  $L - 1$  zeros entre pares de amostras consecutivos. Geralmente utilizamos filtros passa-baixas no lado de menor taxa de amostragem, por exemplo, filtros anti-aliasing, anti-imaging e filtros quadraticos espelhados (quadratic mirror filters) em decimadores, interpoladores e codificadores de sub-banda, respectivamente. Os casos mais simples de interpolador e decimador podem ser visualizados nas figuras 34 e 35. Observe que no caso do decimador, a cada  $M$  amostras computadas pela filtragem pelo filtro  $F(z)$ ,  $M - 1$  são desprezadas e apenas uma é mantida. De forma semelhante, no interpolador, a cada  $L$  amostras na entrada do filtro  $G(z)$ ,  $L - 1$  são nulas, e por tanto dispensariam qualquer cálculo. Esses fatos devem ser considerados ao se implementar os filtros, de forma a diminuir o esforço computacional, não realizando cálculos desnecessários.

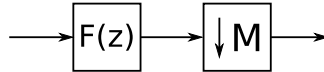


Figura 34: Decimador  $M:1$  com filtro anti-aliasing  $F(z)$ .

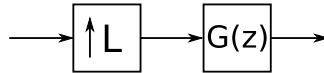


Figura 35: Interpolador  $1:L$  com filtro anti-imaging  $G(z)$ .

Os filtros  $F(z)$  e  $G(z)$  podem ser decompostos em suas  $M$  e  $L$  fases, respectivamente. Suponhamos que  $F(z) = f_0z^0 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \dots$  e  $G(z) = g_0z^0 + g_1z^{-1} + g_2z^{-2} + \dots$ .  $F(z)$  pode ser dividido em suas  $M$  fases da seguinte

forma:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= f_0 z^0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots \\
 &= [f_0 z^0 + f_M z^{-M} + f_{2M} z^{-2M} + \dots] z^0 + \\
 &\quad [f_1 z^0 + f_{M+1} z^{-M} + f_{2M+1} z^{-2M} + \dots] z^{-1} + \\
 &\quad [f_2 z^0 + f_{M+2} z^{-M} + f_{2M+2} z^{-2M} + \dots] z^{-2} + \dots + \\
 &\quad [f_{M-1} z^0 + f_{M+M-1} z^{-M} + f_{2M+M-1} z^{-2M} + \dots] z^{-(M-1)} \\
 &= F_0^M(z^M) z^0 + F_1^M(z^M) z^{-1} + F_2^M(z^M) z^{-2} + \dots + F_{M-1}^M(z^M) z^{-(M-1)}.
 \end{aligned} \tag{419}$$

De maneira análoga, fazemos

$$G(z) = G_0^L(z^L) z^0 + G_1^L(z^L) z^{-1} + G_2^L(z^L) z^{-2} + \dots + G_{L-1}^L(z^L) z^{-(L-1)}. \tag{420}$$

Verificamos agora que  $F(z)$  e  $G(z)$  podem ser implementados de forma que cada fase seja computada em paralelo, conforme esquematizado nas figuras 36 e 37. A resposta ao impulso do  $i$ -ésimo subfiltro,  $F_i^M$  ou  $G_i^L$ , é uma versão subamostrada da resposta ao impulso do filtro,  $F$  ou  $G$ , atrasada de  $i$  unidades.

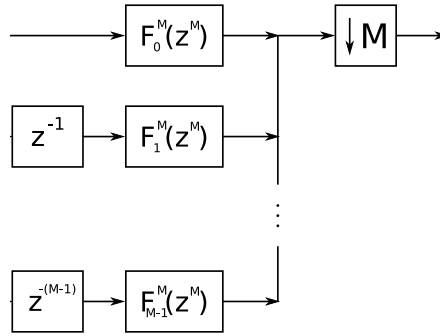


Figura 36: Implementação em paralelo do filtro  $F(z)$ .

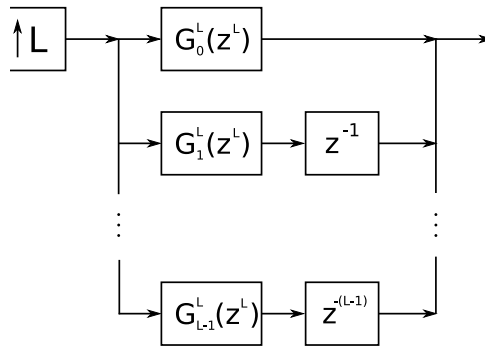


Figura 37: Implementação em paralelo do filtro  $G(z)$ .

Como os subfiltros  $F_i^M(z^M)$  e  $G_i^L(z^L)$  são função de  $z^M$  e  $z^L$  apenas, eles podem ser subamostrados e transferidos para o lado de menor taxa de amostragem, sem alterar a relação entrada-saída do sistema. A nova estrutura está esquematizada nas figuras 38 e 39. O número total de coeficientes dos filtros continua o mesmo, mas como agora os filtros atuam numa extremidade de menor taxa de amostragem, o número de computações aritméticas necessárias é reduzida por um fator  $M$  ou  $L$ .

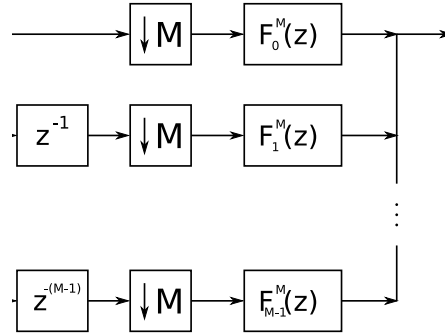


Figura 38: Segunda implementação em paralelo do filtro  $F(z)$ .

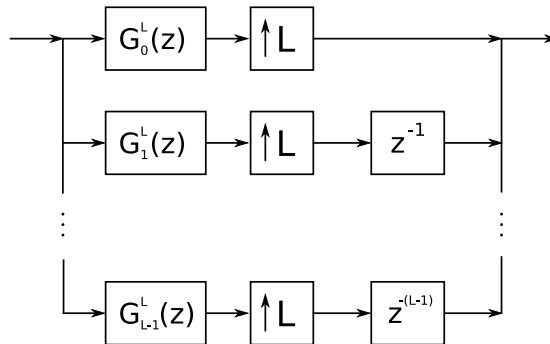


Figura 39: Segunda implementação em paralelo do filtro  $G(z)$ .

Na figura 40 apresentamos o esquema de um sistema de conversão de taxa de amostragem por um fator racional  $L/M$ , onde  $L$  e  $M$  são mutuamente primos (o maior divisor comum entre eles é 1). O filtro  $H(z)$  faz o papel de filtro anti-aliasing e anti-imaging ao mesmo tempo, e para tanto, sua frequência de corte deve ser o mínimo entre as frequências de corte de um filtro anti-aliasing e a de um filtro anti-imaging. Ao longo do sistema podemos verificar a existência de três distintas frequências de amostragem,  $F_x$ ,  $LF_x$  e  $(L/M)F_x$ .

Na forma ilustrada na figura 40, o filtro  $H(z)$  está atuando sobre a taxa de amostragem mais alta do sistema. Como vimos anteriormente, podemos decompor  $H(z)$  e movê-lo para um dos lados de menor taxa de amostragem.

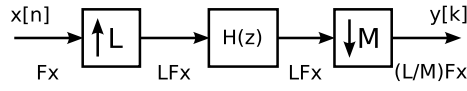


Figura 40: Conversão da Taxa de Amostragem  $L/M$ .

Sendo o filtro  $H(z)$  um filtro FIR, o esforço computacional será reduzido por um fator de  $L$  ou  $M$  vezes, dependendo do lado para o qual o filtro for movido.

Utilizando as identidades da figura 41 podemos mostrar equivalência dos sistemas representados na figura 42. Poderemos também utilizar a equivalência entre decimação seguida de interpolação e interpolação seguida de decimação, quando os fatores de interpolação e decimação,  $M$  e  $L$ , forem primos entre si, conforme ilustrado na figura 43.

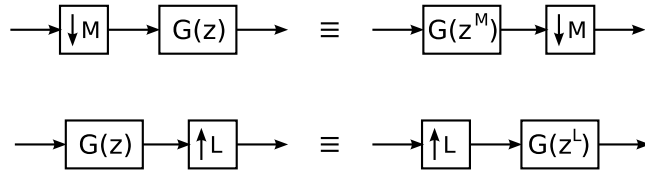


Figura 41: Identidades de Sistemas de Múltiplas Taxas de Amostragem.

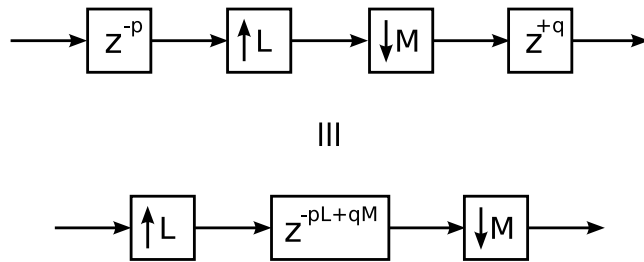


Figura 42: Dois Sistemas Equivalentes.

O sistema ilustrado na figura 40 pode ser decomposto em duas formas diferentes utilizando para tanto uma das implementações ilustradas nas figuras 38 e 39. Os sistemas obtidos após a decomposição polifásica estão representados nas figuras 44 e 45, onde cada um dos braços é constituído por  $\mu$  filtro  $H_i^M(z)$  ou  $H_i^L(z)$  e um atraso  $z^i$ ,  $0 \leq i < M$  ou  $z^j$ ,  $0 \leq j < L$ , situado entre decimadores e interpoladores. Se  $L$  e  $M$  são mutuamente primos, então para qualquer inteiro  $i$ ,  $0 \leq i < M$ , existe um número  $p_i$ ,  $0 \leq p_i < M$ , tal que  $(p_i L \bmod M) = i$ . Por tanto,  $p_i L = i + q_i M$  para algum  $q_i$ ,  $0 \leq q_i < L$  e então,  $i = p_i L - q_i M$ . Desta forma, cada um dos atrasos das figuras 44 e 45 podem ser dismembrados e deslocados, conforme a figura 42. O interpolador e o decimador tornam-se então adjacentes, podemos assim trocar a ordem em que aparecem, conforme

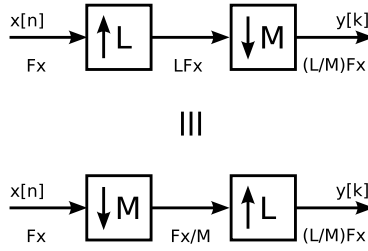


Figura 43: Sistemas Equivalentes ( $L$  e  $M$  são mutuamente primos).

ilustrado na figura 43, derivando assim as estruturas representadas nas figuras 46 e 47.

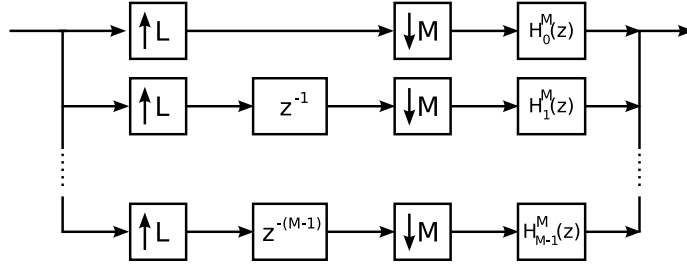


Figura 44: Arranjo Polifásico para um Sistema com Conversão de Amostragem  $L/M$ .

Com a mudança da ordem entre a decimação e a interpolação, a taxa de amostragem intermediária, que antes era  $LF_x$ , passa a ser  $F_x/M$ . Esta nova taxa de amostragem é menor que ambas as taxas, de saída e de entrada do sistema. Desta forma, é interessante aplicar uma decomposição polifásica aos filtros individuais  $H_i^M(z)$  ou  $H_j^L(z)$ , filtros esses associados ao atraso  $z^{+q_i}$ , formando então uma estrutura de matriz. A estrutura polifásica em matriz final para o sistema de conversão de taxa de amostragem  $L/M$  é ilustrado na figura 48.

Para derivar a matriz do filtro polifásico para um dado filtro  $H(z) = \sum_n h[n]z^{-n}$ , é necessário fazer os seguintes passos. A cada  $M$  amostras de  $x[n]$ ,  $L$  amostras de  $y[k]$  são geradas. Os sinais de entrada e saída podem ser agrupados em blocos com  $M$  e  $L$ , respectivamente.

$$X_m^M[i] = x[-m + iM], \quad 0 \leq m < M, \quad (421)$$

$$Y_l^L[j] = y[-l + jL], \quad 0 \leq l < L. \quad (422)$$

O mapeamento de  $n$  em  $(m, i)$  e de  $k$  em  $(l, j)$  é um mapeamento um para um. Desta forma, para cada bloco de entrada, um bloco de saída é gerado.  $X_m^M[i]$  e  $Y_l^L[j]$  são versões subamostradas de  $X[n]$  e  $y[n]$ , transladadas de  $m$

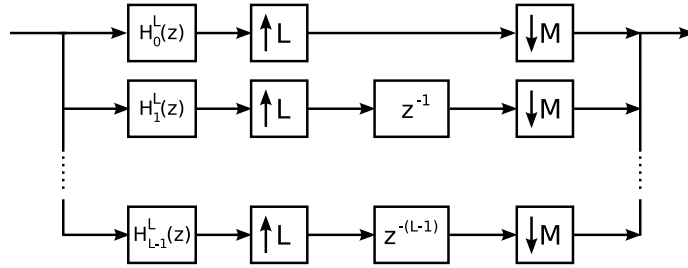


Figura 45: Arranjo Polifásico para um Sistema com Conversão de Amostragem L/M (2).

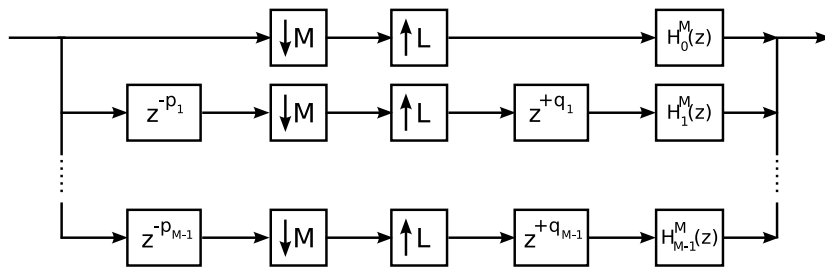


Figura 46: Arranjo Polifásico Modificado.

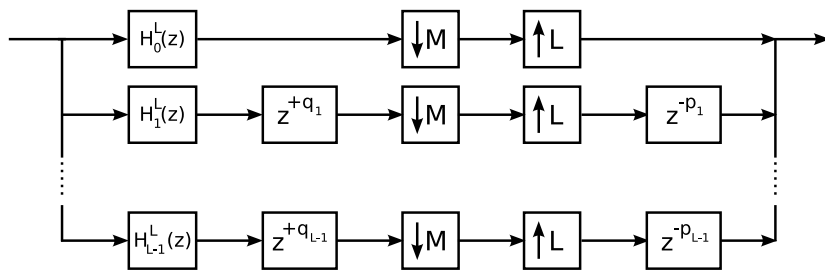


Figura 47: Arranjo Polifásico Modificado (2).

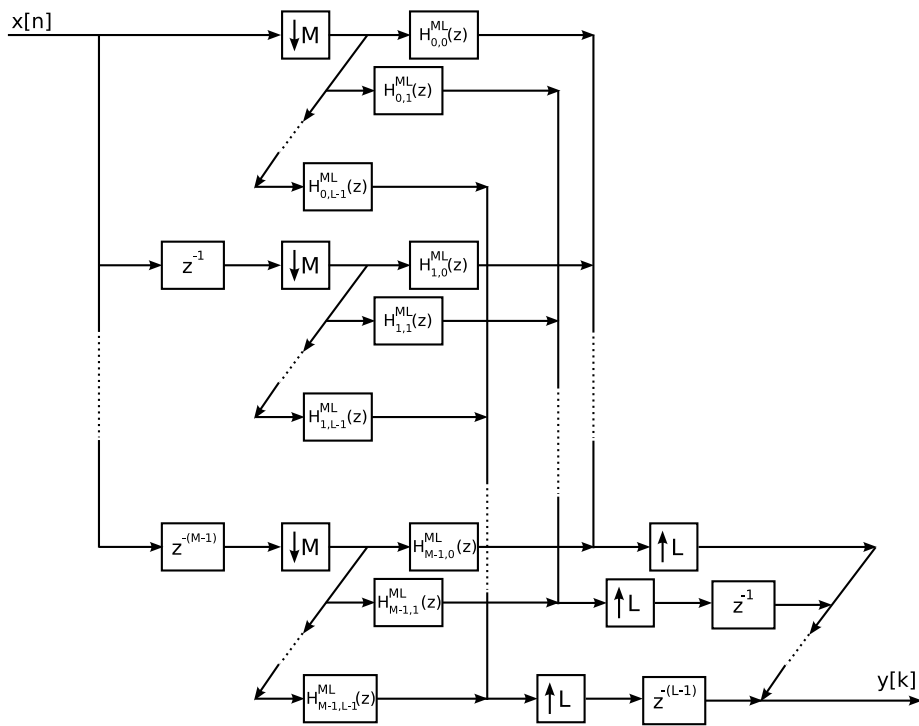


Figura 48: Estrutura de Matriz Polifásica.

e  $l$  amostras, respectivamente. A transformada  $z$  da entrada e da saída podem ser representadas como uma soma das transformadas de  $X_m^M[i]$  e  $Y_l^L[j]$  multiplicadas pelos atrasos de fase.

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_n x[n]z^{-n} \\
&= \sum_i \sum_{m=0}^{M-1} x[-m + iM]z^{-(m+iM)} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} z^{+m} \sum_i X_m^M[i](z^M)^{-i} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} z^{+m} \underline{X}_m^M[i](z^M), \tag{423}
\end{aligned}$$

onde  $\underline{X}_m^M[i](z^M) = \sum_i X_m^M[i](z^M)^{-i}$ . De forma similar teremos

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{L-1} z^{+l} \underline{Y}_l^L[j](z^L). \tag{424}$$

A relação entrada-saída do sistema é dada por

$$y[k] = \sum_n x[n]h[kM - nL]. \tag{425}$$

A representação de um bloco de saída é da seguinte forma

$$\begin{aligned}
Y_l^L[j] &= y[l + jL] \\
&= \sum_n x[n]h[(l + jL)M - nL] \\
&= \sum_i \sum_{m=0}^{M-1} X_m^M[i]h[(l + jL)M - (-m + iM)L] \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_i X_m^M[i]h[(lM + mL) + (j - i)ML]. \tag{426}
\end{aligned}$$

Se definirmos agora  $h_{m,l}^{ML}[j] = h[(lM + mL) + jML]$ ,  $0 \leq m < M$  e  $0 \leq l < L$ , teremos

$$\begin{aligned}
Y_l^L[j] &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_i X_m^M[i]h_{m,l}^{ML}[j - i] \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} X_m^M[j] * h_{m,l}^{ML}[j]. \tag{427}
\end{aligned}$$

Podemos então escrever  $\underline{Y}_l^L(z)$  da seguinte forma

$$\underline{Y}_l^L(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \underline{X}_m^M(z) H_{m,l}^{ML}(z), \quad (428)$$

e  $Y(z)$  como

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{l=0}^{L-1} z^{-l} \underline{Y}_l^L(z^L) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \underline{X}_m^M(z^L) H_{m,l}^{ML}(z^L). \end{aligned} \quad (429)$$

Os filtros polifásicos  $H_{m,l}^{ML}(z)$  são os filtros ilustrados na figura 48. Pelo teorema chinês dos resíduos (1), o mapeamento do índice  $n$  de  $h[n]$  à  $(m, l, j)$  é um para um. Cada coeficiente do filtro  $h[n]$  está associado a apenas um elemento de filtro polifásico da matriz. É importante notar que o número de coeficientes permanece o mesmo, e por tanto o esforço computacional será reduzido por um fator  $LM$  comparando-se com a implementação inicial de  $H(z)$ .

## 18 Pacotes Wavelets

Com a análise em resoluções múltiplas temos o seccionamento do espaço em subespaços ortogonais encaixantes, de forma a termos um subespaço de mais baixa resolução  $V_0$  e os demais espaços  $W_j$ . Se considerarmos espaços subsequentes,  $V_{j-1}$  e  $V_j$ , temos  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ . Heuriscicamente,  $V_{j-1}$  é duas vezes maior que  $V_j$  e  $W_j$  (que possuem, possivelmente o mesmo tamanho), conseqüentemente,  $V_{j-2}$  é quatro vezes maior que  $V_j$ , e  $W_{j-1}$  é duas vezes maior que  $W_j$ . Essas diferenças entre os tamanhos dos subespaços sugere que podemos dividi-los ainda mais algumas vezes, de forma a termos ao final subespaços de tamanhos iguais. Devemos então construir novas funções que servirão de base para esse espaços ortonormais. Essas funções são chamadas “pacotes de wavelets”, são funções bem localizadas no tempo e na freqüência. Os pacotes de wavelets foram introduzidos por Coifman, Meyer e Wickerhaser (10).

Para decompor o espaço utilizamos os filtros espelho conjugados. Queremos agora mostrar que com a utilização de filtros espelho conjugados é possível dividir um espaço  $U_j$ , que admita uma base ortogonal de funções transladadas por  $n2^j$ , onde  $n \in \mathbf{Z}$ , em dois outros subespaços de forma que: seja  $\{\theta_j(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  uma base orthonormal do espaço  $U_j$  e sejam os pares de filtros espelho conjugados  $h$  e  $g$ , então definimos

$$\theta_{j+1}^0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \theta_j(t - 2^j n) \quad \text{e} \quad \theta_{j+1}^1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \theta_j(t - 2^j n). \quad (430)$$

sendo a família

$$\{\theta_{j+1}^0(t - 2^{j+1} n), \theta_{j+1}^1(t - 2^{j+1} n)\}_{n \in \mathbf{Z}} \quad (431)$$

também uma base ortonormal de  $U_j$ .

A hipótese de que  $\{\theta_j(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  é ortonormal equivale a dizer que (lembrando que  $\widehat{\theta}_j$  é periódico de período  $2^{-j+1}\pi$ )

$$\delta_{n,m} = \langle \theta_j(t - 2^j n), \theta_j(t - 2^j m) \rangle \quad (432)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2^j(n-m)\omega} |\widehat{\theta}_j(\omega)|^2 d\omega \quad (433)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{2k\pi 2^j}^{2(k+1)\pi 2^{-j}} e^{-i2^j(n-m)\omega} |\widehat{\theta}_j(\omega)|^2 d\omega \quad (434)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi 2^{-j}} e^{-i(n-m)2^j\omega} \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2k\pi}{2^j})|^2 \right) d\omega \quad (435)$$

Como  $\int e^{i\omega k} = 2\pi\delta(k)$ , concluímos que

$$\frac{1}{2^j} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2k\pi}{2^j})|^2 = 1. \quad (436)$$

Tomando a transformada de Fourier de  $\theta_{j+1}^0(t)$ , definido em (430), temos

$$\widehat{\theta_{j+1}^0}(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n e^{-in2^j\omega} \widehat{\theta}_j(\omega) = \sqrt{2}m_0(2^j\omega)\widehat{\theta}_j(\omega), \quad (437)$$

onde  $m_0(\omega) = 1/\sqrt{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n e^{-in\omega}$ . De forma análoga

$$\widehat{\theta_{j+1}^1}(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n e^{-in2^j\omega} \widehat{\theta}_j(\omega) = \sqrt{2}m_1(2^j\omega)\widehat{\theta}_j(\omega), \quad (438)$$

onde  $m_1(\omega) = 1/\sqrt{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n e^{-in\omega}$ .

Como vimos na sessão 9, as funções  $m_0$  e  $m_1$  devem satisfazer às seguintes condições:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (439)$$

$$|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (440)$$

$$m_1(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_1(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0. \quad (441)$$

Da mesma forma que mostramos (436), deve-se mostrar que as famílias  $\{\theta_{j+1}^l(t - 2^{j+1}n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ ,  $l = 0, 1$ , são ortonormais se e somente se

$$\frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_{j+1}^l(\omega + \frac{2k\pi}{2^{j+1}})|^2 = 1. \quad (442)$$

É necessário também que as duas famílias seja ortogonais entre si, isso implica em

$$\frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\theta}_{j+1}^0(\omega + \frac{2k\pi}{2^{j+1}}) \overline{\widehat{\theta}_{j+1}^1(\omega + \frac{2k\pi}{2^{j+1}})} = 0 \quad (443)$$

Para mostrar (442) é necessário tomar (437) ou (438), separar o somatório em nos termos pares e ímpares, considerar as condições (440) e (441), e ainda lembrar que  $m_l$  é uma função periódica de período  $2\pi$ . Teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_{j+1}^l(\omega + \frac{2k\pi}{2^{j+1}})|^2 &= \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{k\pi}{2^j})|^2 |m_l(2^j\omega + k\pi)|^2 \\
&= \frac{1}{2^{j+1}} |m_l(2^j\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2k\pi}{2^j})|^2 + \\
&\quad \frac{1}{2^{j+1}} |m_l(2^j\omega + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \pi 2^{-j} + \frac{2k\pi}{2^j})|^2 \\
&= 1. \tag{444}
\end{aligned}$$

Podemos mostrar (443), para tanto devemos seguir o mesmo procedimento, mas considerar também a relação (441).

Para completar a demonstração de que  $U_j = U_{j+1}^0 \oplus U_{j+1}^1$ , onde  $U_j$  é o espaço gerado por  $\{\theta_j(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ ,  $U_{j+1}^0$  o espaço gerado por  $\{\theta_{j+1}^0(t - 2^{j+1} n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  e  $U_{j+1}^1$  o espaço gerado por  $\{\theta_{j+1}^1(t - 2^{j+1} n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ , devemos mostrar que as duas últimas famílias juntas, geram o mesmo espaço que a primeira família. Ou seja, dada a seqüência  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z})$ , existem as seqüências  $\{b_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  e  $\{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z})$ , tais que

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \theta_j(t - 2^j n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n \theta_{j+1}^0(t - 2^{j+1} n) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \theta_{j+1}^1(t - 2^{j+1} n). \tag{445}$$

Como  $\theta_{j+1}^0$  e  $\theta_{j+1}^1$  são ortogonais,  $b_n$  se restringe a

$$b_n = \left\langle \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \theta_j(t - 2^j l), \theta_{j+1}^0(t - 2^{j+1} n) \right\rangle \tag{446}$$

$$= \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2^j l \omega} e^{i2^{j+1} n \omega} \widehat{\theta}_j(\omega) \overline{\widehat{\theta}_{j+1}^0(\omega)} d\omega \tag{447}$$

Usando agora a relação (437), e lembrando que  $m_0$  e  $\widehat{\theta}_j$  são periodicos com período  $2\pi$  e  $2\pi 2^j$ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2^j(l-2n)\omega} \widehat{\theta}_j(\omega) \overline{m_0(2^j\omega) \widehat{\theta}_j(\omega)} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi 2^{-j}} e^{-i2^j(l-2n)\omega} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2\pi m}{2^j})|^2 \overline{m_0(2^j\omega + \frac{2\pi m}{2^j})} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \int_0^{2\pi 2^{-j}} e^{-i2^j(l-2n)\omega} \left( \sum_{m \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2\pi m}{2^j})|^2 \right) \overline{m_0(2^j\omega)} d\omega \tag{448}
\end{aligned}$$

Considerando a equação (436) e posteriormente fazendo a substituição  $\xi = 2^j \omega$ ,

teremos

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \left( 2^j \int_0^{2\pi 2^{-j}} e^{-i2^j(l-2n)\xi} \overline{m_0(2^j\xi)} d\xi \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \left( \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i2^j(l-2n)\omega} m_0(\omega) d\omega \right). \tag{449}
\end{aligned}$$

Ao calcularmos  $h_n$  a partir da relação (430) temos

$$\begin{aligned}
h_n &= \langle \theta_{j+1}^0(t), \theta_j(t - 2^j n) \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\theta_{j+1}^0}(\omega) e^{i2^j n \omega} \overline{\widehat{\theta}_j(\omega)} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_0(2^j \omega) \widehat{\theta}_j(\omega) \overline{\widehat{\theta}_j(\omega)} e^{i2^j n \omega} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_0(2^j \omega) e^{i2^j n \omega} |\widehat{\theta}_j(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi 2^j} m_0(2^j \omega + 2\pi m) e^{i2^j n \omega} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2\pi m}{2^j})|^2 d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi 2^j} m_0(2^j \omega) e^{i2^j n \omega} \left( \sum_{m \in \mathbf{Z}} |\widehat{\theta}_j(\omega + \frac{2\pi m}{2^j})|^2 \right) d\omega \\
&= \frac{2^j \sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi 2^j} m_0(2^j \omega) e^{i2^j n \omega} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_0(\omega) e^{in\omega} d\omega \tag{450}
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado acima, concluímos que

$$b_n = \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \overline{h_{2n-l}}. \tag{451}$$

De forma semelhante, concluímos que

$$c_n = \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \overline{g_{2n-l}}. \tag{452}$$

A idéia é utilizar o resultado acima para particionar subsequêntemente os subespaços ao longo do processo de decomposição. Um subespaço  $W_j^0$  será particionado em  $W_{j+1}^0$  e  $W_{j+1}^1$ ,  $W_{j+1}^0$  será particionado em  $W_{j+2}^0$  e  $W_{j+2}^1$ , já  $W_{j+1}^1$  será particionado em  $W_{j+2}^2$  e  $W_{j+2}^3$ , e assim podemos continuar o processo. A divisão recursiva dos espaços vetoriais pode então ser representada por uma árvore binária.

Ao invés de dividir apenas os epaços de aproximação  $V_j$ , dividiremos também o espaço dos detalhes  $W_j$ , para tanto fazendo uso do que foi mostrado acima.

Se  $U_j = W_j$ , então podemos particionar esse espaço em dois novo subespaços, e podemos obter a base para esse subespaço, bastando para tanto conhecer as funções de base do espaço antecessor e os coeficientes do filtro espelhado conjugado. A árvore binária que representa o processo de decomposição pode ser vista na figura 49.

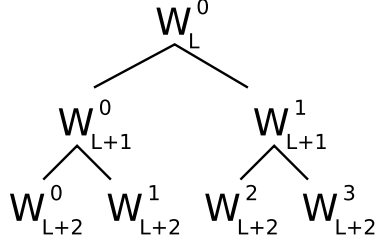


Figura 49: Árvore Binária de Decomposição do Espaço com Pacotes Wavelets.

Cada nó da árvore é indexado por um par  $(j, p)$ , sendo  $j$  indexando a profundidade do nó na árvore e  $p$  a posição do nó no nível em questão, quantos nós existem à esquerda do nó selecionado. Cada nó  $(j, p)$  é associado a um subespaço  $W_j^p$ , que admite uma base ortonormal  $\{\psi_j^p(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ . Os nós na extrema esquerda, estão associados aos subespaços  $W_j^0$ , espaços de aproximação,  $W_j^0 = V_j$  e  $\psi_j^0 = \phi_j$ . Se para um dado subespaço  $W_j^p$ , associado ao nó  $(j, p)$ , temos já construída a sua base  $B_j^p = \{\psi_j^p(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ , podemos obter a base para os subespaços dos nós filhos através do particionamento

$$\psi_{j+1}^{2p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \psi_j^p(t - 2^j n) \quad e \quad (453)$$

$$\psi_{j+1}^{2p+1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \psi_j^p(t - 2^j n). \quad (454)$$

Os coeficientes  $h_n$  e  $g_n$  são dados por

$$h_n = \langle \psi_{j+1}^{2p}(u), \psi_j^p(u - 2^j n) \rangle, \quad (455)$$

$$g_n = \langle \psi_{j+1}^{2p+1}(u), \psi_j^p(u - 2^j n) \rangle. \quad (456)$$

Dissemos inicialmente, que dividir mais vezes os subespaço de detalhes levaria a uma melhora na resolução em frequência. Pelo princípio de incerteza de Heisenberg, é de se esperar que como consequência tenhamos uma perda na definição temporal. Para averiguar esses aspectos, suponhamos que os filtros  $h$  e  $g$  possuem resposta ao impulso de tamanho  $K$ . O suporte de  $\phi$  será então de tamanho  $K - 1$  ??, e então  $\psi_L^0 = \phi_L$  terá suporte de tamanho  $(K - 1)2^L$ . Utilizando as relações (453) e (454), podemos mostrar que o suporte de  $\psi_j^p$  possui tamanho  $(K - 1)2^j$ . O parâmetro  $j$  especifica, pois, a escala  $2^j$  do suporte.

Tomando a transformada de Fourier de (453) e (454), mostramos que a transformada de Fourier dos filhos está relacionada à dos pais da seguinte maneira

$$\widehat{\psi}_{j+1}^{2p}(\omega) = \widehat{h}(2^j\omega)\widehat{\psi}_j^p(\omega), \quad (457)$$

$$\widehat{\psi}_{j+1}^{2p+1}(\omega) = \widehat{g}(2^j\omega)\widehat{\psi}_j^p(\omega). \quad (458)$$

A maior parte da energia de  $\widehat{\psi}_j^p$  está concentrada em uma determinada banda de frequências, e os dois filtros  $\widehat{h}(2^j\omega)$  e  $\widehat{g}(2^j\omega)$  selecionam entre as componentes de altas e baixas frequências dentro desta banda.

## 19 Perspectiva Histórica

A origem dos estudos sobre wavelet é bastante difusa e se confunde com diversos outros estudos correlatos. Meyer diz ter encontrado 15 distintas raízes para a teoria de wavelets, sendo as mais antigas delas da década de 30. Dávid Marr, por exemplo, trabalhando em visão artificial e robótica no MIT teve idéias similares a wavelets. A comunidade de físicos foi apresentada às wavelets com o trabalho de renormalização de Kenneth Wilson, ganhador do Nobel em 1971. Os matemáticos Littlewood e Paley desenvolveram técnicas semelhantes às wavelets que foram aplicadas ao estudo de séries trigonométricas. Na área de processamento de sinais, os trabalhos de três pesquisadores franceses em 1976, A. Croisier, D. Esteban e C. Galand, introduziram um banco de filtros que poderia ser utilizado para decompor, subamostrar e reconstruir um sinal, sendo mais tarde relacionado a teoria de wavelets. Outros pesquisadores desenvolveram funções wavelets, similares à função de Gabor, para modelar o sistema visual humano.

O termo “wavelet” (originalmente “wavelet de forma constante” para contrastar com as funções da análise de Fourier de tempo curto (short-time Fourier transform)) foi introduzido por Jean Morlet em seus trabalhos em geofísica, onde aplicou, pela primeira vez, a transformada wavelet aplicada a análise de dados sísmicos (22). A maneira padrão para se localizar óleo no subsolo foi introduzida em nos anos 60 e consiste em enviar vibrações ou pulsos no subsolo e analisar os seus ecos. Este tipo de análise fornece a profundidade, a espessura e a constituição das várias camadas do solo. De maneira simples podemos dizer que a frequência dos ecos está ligada a espessura das camadas, sendo as altas frequências associadas às camadas mais finas. Morlet sabia que os pulsos modulados que eram enviados para o subsolo possuíam uma duração muito longa em altas frequências para ser capaz de separar precisamente camadas muito próximas. A idéia de Morlet foi, ao invés de emitir pulsos de mesma duração, usar formas de ondas mais curtas em frequências mais altas. Tais formas de onda foram obtidas por uma simples mudança de escala de uma única função chamada “wavelet”. Esta não foi a primeira técnicas baseadas em translação e dilatação, podemos citar exemplos anteriores da utilização delas, como o trabalho desenvolvido por A. Calderón (6), (7).

Embora Alex Grossmann estudasse física teórica, a abordagem de Morlet trouxe algumas idéias que de certa forma se aproximavam ao seu trabalho em estados coerentes quânticos. Os resultados de Morlet instigaram Grossmann a fazer um estudo mais detalhado da transformada wavelet. Grossman e Morlet mostraram que quando wavelets eram utilizadas para representar um sinal, não havia variação na energia deste, condição crucial para se fazer a reconstrução do sinal. Apenas 40 anos depois a transformada wavelet seria formalizada através de um trabalho de colaboração entre a física teórica e processamento de sinais, envolvendo Gabor, Morlet e Grossmann (12).

Em 1986, Stéphane Mallat, no momento, ainda um estudante de vinte e três anos, encontra-se com Yves Meyer e juntos mostram que os diversos trabalhos sobre wavelets, algoritmos piramidais utilizados em processamento de imagens, codificação de subbanda em processamento de sinais e filtro espelhados em quadratura utilizados em processamento de sinais de voz estão todos fundamentados sobre uma mesma teoria (21). Criaram assim a teoria da análise em resoluções múltiplas, tendo como um dos resultados a transformada rápida wavelet. Um outro resultado foi a teoria matemática para as wavelets ortogonais.

O algoritmo proposto por Mallat utilizava inicialmente versões de wavelets de Guy Battle e Pierre Gilles Lemarié que se estendiam do infinito negativo ao infinito positivo e portanto tinham que ser necessariamente truncadas. As wavelets de suporte compacto surgem com os trabalhos de Ingrid Daubechies e servem ao propósito de evitar o erro cometido com o truncamento. Essas wavelets não podem ser construídas de forma analítica, apenas numericamente. Mais tarde, outros pesquisadores mostraram que seria possível criar wavelets ortogonais com suporte compacto e com função explícita, mas, para tanto, seria necessário utilizar mais do que uma função escala.

## A Teorema de Parseval

**Teorema A.1.** *Se  $f$  e  $h$  pertencem a  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ , então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{h}^*(\omega)d\omega \quad (459)$$

*Para  $h = f$  segue que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (460)$$

*Demonstração.* Seja  $g = f * \bar{h}$ , onde  $\bar{h} = h^*(-t)$ . □

## B Base de Riesz

Em um espaço de infinitas dimensões, se relaxamos a condição de ortogonalidade de uma base, devemos impor uma equivalência parcial de energia para garantir

a estabilidade da base. Seja uma família de vetores  $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , esta é dita uma base de Riesz de  $H$  se for linearmente independente e existir  $A, B > 0$  tais que para qualquer  $f \in H$  podemos encontrar  $\lambda_n$  de forma que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n , \quad (461)$$

em que a seguinte condição seja satisfeita

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_n |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2 . \quad (462)$$

$\tilde{e}_n$  O teorema de representação de Riesz prova que existe  $\tilde{e}_n$  tal que  $\lambda_n = \langle f, \tilde{e}_n \rangle$ , e por (462), teremos

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \tilde{e}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2 . \quad (463)$$

O teorema (??) garante que para todo  $f \in H$

$$A \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 , \quad e \quad (464)$$

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \tilde{e}_n \rangle e_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \tilde{e}_n . \quad (465)$$

A família dual  $\{\tilde{e}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  é linearmente independente e também uma base de Riesz. Essas bases duais devem ser biortogonais pois no caso em que  $f = e_p$  teremos  $e_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_p, \tilde{e}_n \rangle e_n$ . Como  $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  constitui uma família linearmente independente, teremos a relação de biortogonalidade entre as bases

$$\langle e_p, \tilde{e}_n \rangle = \delta_{p-n} . \quad (466)$$

## Referências

- [1] *The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, 1997.
- [2] E. W. Aslaksen and J. R. Klauder. Unitary representations of the affine group. *j-J-MATH-PHYS*, 9(2):206–211, feb 1968.
- [3] P. Auscher. *Ondelettes fractales et applications*. PhD thesis, University of Paris IX, 1989.
- [4] Guy Battle. A block spin construction of ondelettes. part i: Lemariè functions. *Comm. Math. Phys.*, 110:601–615, 1987.

- [5] Riccardo Bernardini and Jelena Kovacevic. Arbitrary tilings of the time-frequency plane using local bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47:2293–2304, 1999.
- [6] A.P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24:113–190, 1964.
- [7] A.P. Calderón. Parabolic maximal functions associated to a distribution. *Adv. Math.*, 16:1–64, 1974.
- [8] C. K. Chui and J. Z.Wang. On compactly supported spline wavelets and a duality principle. *Trans. Math. Soc.*, 330(2):903–915, 1992.
- [9] A. Cohen and Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets iii. better frequency resolution. *SIAM Journal of Mathematics Analysis*, 24:520–527, 1993.
- [10] R. R. Coifman, Y. Meyer, and M. V. Wicherhauser. Wavelet analysis and signal processing. pages 153–178, 1992.
- [11] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- [12] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Math. Anal.*, 15(4):723–736, July 1984.
- [13] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representations I: General results. *J. Math. Phys.*, 26:2473–2479, 1985.
- [14] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representations II: Examples. *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, 45:293, 1986.
- [15] C.C. Hsiao. Polyphase filter matrix for rational sampling rate conversions. *Proc. ICASSP*, pages 2173–2176, 1987.
- [16] Jelena Kovacevic and Martin Vetterli. Perfect reconstruction filter banks with rational sampling rate changes. *IEEE*, pages 1785–1788, 1991.
- [17] Jelena Kovacevic and Martin Vetterli. Perfect reconstruction filter banks with rational sampling factors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41:2047–2066, 1993.
- [18] R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and A. Grossmann. Analysis of sound patterns through wavelet transforms. *Int. J. Patt. Rec. Art. Intell.*, 1(2):273–301, 1988.
- [19] P. G. Lemarie. Sur l’existence des analyses multi-résolutions en théorie des ondelettes. *Revista Mat. Iberoamericana*, 8:457–474, 1993.

- [20] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 11:674–693, 1989.
- [21] Stéphane Mallat. Multiresolution approximation and wavelets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 315:69–88, 1989.
- [22] J. Morlet, G. Arens, I. Fourgeau, and D. Giard. Wave propagation and sampling theory. *Geophysics*, 47:203–236, 1982.
- [23] K. Nayebi, T. P. Barnwell III, and M. J. T. Smith. The design of perfect reconstruction nonuniform band filters. *Proc. ICASSP*, pages 1781–1784, 1991.
- [24] T. Paul. Functions analytic on the half-plane as quantum mechanical states. *JMP*, 25(11):3252–3263, 1984.
- [25] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. On the asymptotic convergence of b-spline wavelets to gabor functions. *IEEE, Trans. Information Theory*, 38(2):864–872, 1992.