

Banco de Filtros Wavelets com Fator de Escala Maior que Dois

Leonardo Carneiro de Araújo
orientador: Hani Camille Yehia

20 de março de 2007

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Freqüência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Outline I

- 1** Audição
 - Resposta na Cóclea
- 2** Wavelets
 - Definição
 - Wavelet de Haar
 - Transformada Wavelet Discreta
 - Localização Tempo-Frequência
 - Análise em Resoluções Múltiplas
 - Relação de Escala
 - Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier
- 3** Construção das Wavelets
 - Projeto de m_0
- 4** Conclusões

Audição

Figura: Gratitude Painting #68 (Lee-Ellen Marvin, 2004)



Hearing is a wonderful thing. Sometimes, when I listen fully, I feel as if I have become the sound I am listening to.

(Lee-Ellen Marvin)

Aparelho Auditivo

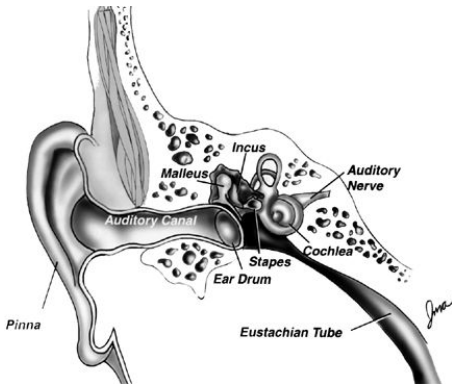


Figura: Aparelho Auditivo.

Outline I

- 1** Audição
 - Resposta na Cóclea
- 2** Wavelets
 - Definição
 - Wavelet de Haar
 - Transformada Wavelet Discreta
 - Localização Tempo-Frequência
 - Análise em Resoluções Múltiplas
 - Relação de Escala
 - Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier
- 3** Construção das Wavelets
 - Projeto de m_0
- 4** Conclusões

Resposta a um estímulo na Cóclea

Estímulo: onda de pressão de uma única freqüência, $f_\omega(t) = e^{j\omega t}$

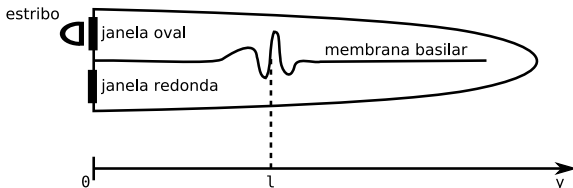


Figura: Estimulação em uma Cóclea estirada.

Resposta: $F_\omega(t, y) = e^{j\omega t} \phi_\omega(y)$.

Resposta Logarítmica

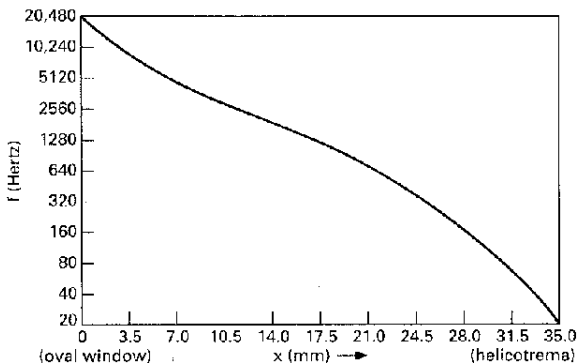


Figura: Frequência versus Posição ao longo da Membrana Basilar. [?, ?]

$$\phi_{\omega}(y) = \phi(y - y_{\omega}) \approx \phi(y - \log \omega)$$

Resposta a uma Excitação Qualquer

Utilizando a Transformada de Fourier e suas propriedades, o Teorema de Parseval, algumas substituições e manipulações...

$$F(t, \log a) = G(a, t) = \sqrt{|a|} \int f(t') \psi(a(t' + t)) dt', \quad (1)$$

em que $\hat{\psi}(e^{-x}) = \sqrt{2\pi} \sqrt{|a|} \phi(x)$ e $y = \log a$.

Escolhendo $a = 1/s$, $t = -u$ e como $a > 0$

$$G(s, u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \quad (2)$$

Outline I

- 1 Audição
 - Resposta na Cóclea
- 2 Wavelets
 - Definição
 - Wavelet de Haar
 - Transformada Wavelet Discreta
 - Localização Tempo-Freqüência
 - Análise em Resoluções Múltiplas
 - Relação de Escala
 - Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier
- 3 Construção das Wavelets
 - Projeto de m_0
- 4 Conclusões

Vendo a Floresta - e as Árvores

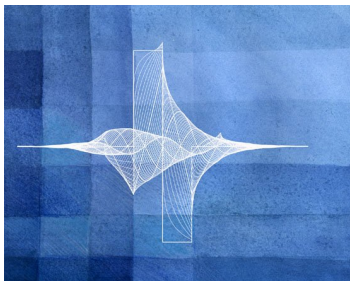


Figura: Wavelet Bird (Annette Unser, 1999)

*To see a world in a grain of sand and heaven in a wild flower
Hold infinity in the palms of your hand and eternity in an hour.*

(William Blake)

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

■ Definição

- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Definição

As funções wavelets $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ devem satisfazer a relação

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right), \quad (3)$$

e algumas condições de admissibilidade, de forma que a família $\{\psi_{s,u}\}_{s,u \in \mathbb{R}}$ constitui uma base para o espaço $L^2(\mathbb{R})$.

Condição de admissibilidade:

$$C_\psi = 2\pi \int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (4)$$

A Equação 4 implica em:

$$\widehat{\psi}(0) = 0 \quad \text{ou seja} \quad \int \psi(t) dt = 0, \quad (5)$$

caso $\psi \in L^1(\mathbb{R})$.

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Wavelet de Haar

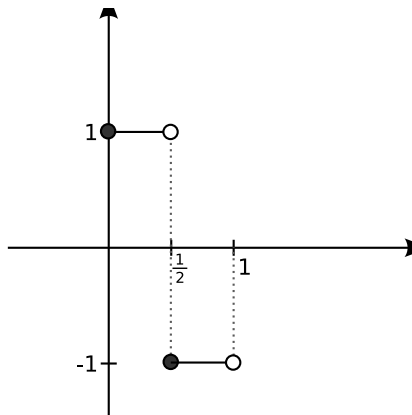


Figura: Wavelet de Haar.

Translação e Dilatação

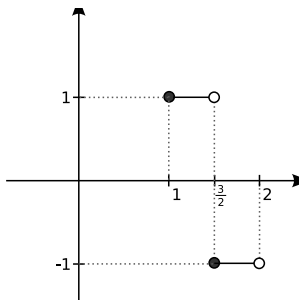


Figura: Translação.

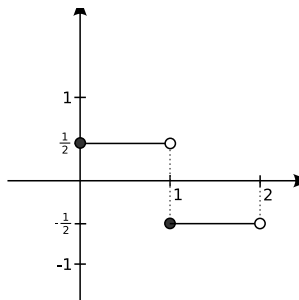


Figura: Dilatação.

Função Escala

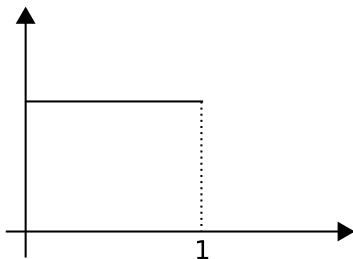


Figura: Função Escala.

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Transformada Wavelet Discreta

Restringindo s e u da seguinte maneira: $s = s_0^j$ e $u = ku_0s_0^j$, em que $j, k \in \mathbb{Z}$ e $s_0 \neq 1$ e $u_0 > 0$, obtem-se

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ku_0s_0^j}{s_0^j}\right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j}t - ku_0). \quad (6)$$

Uma função f será representada da seguinte forma:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (7)$$

Exemplo 1 : Wavelet de Haar

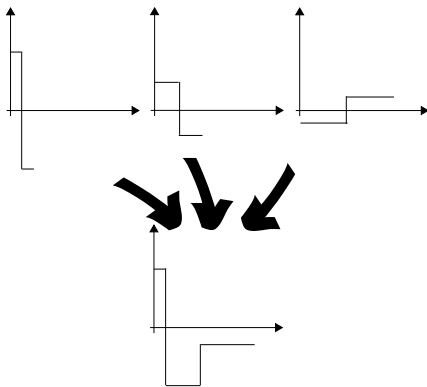


Figura: Decomposição - Wavelet de Haar.

Exemplo 2 : Wavelet de Haar

$$s(t) = \text{sen}(\omega) + \frac{1}{2}\text{sen}(2\omega) + \frac{1}{4}\text{sen}(45\omega) \quad (8)$$

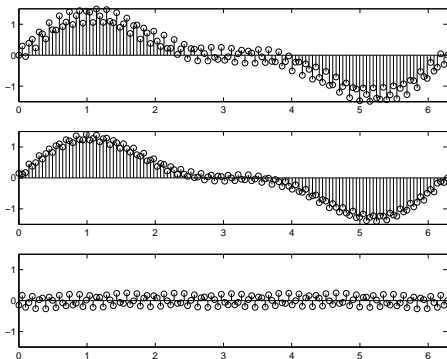


Figura: Decomposição - Wavelet de Haar.

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Freqüência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Localização Tempo-Freqüência

... Our everyday experiences - especially our auditory sensations - insist on a description in terms of both time and frequency

(D. Gabor)

Transformada de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (9)$$

Transformada de Fourier Janelada

$$(T^{win}f)(\omega, t) = \int f(s)g(s-t)e^{-i\omega s} ds \quad (10)$$

Janelamento - Efeito Tempo-Freqüência

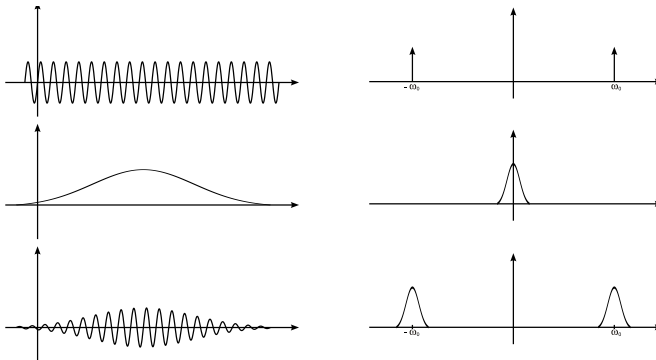


Figura: Janela gaussiana aplicada a uma senoide.

Janelamento - Efeito Tempo-Freqüência

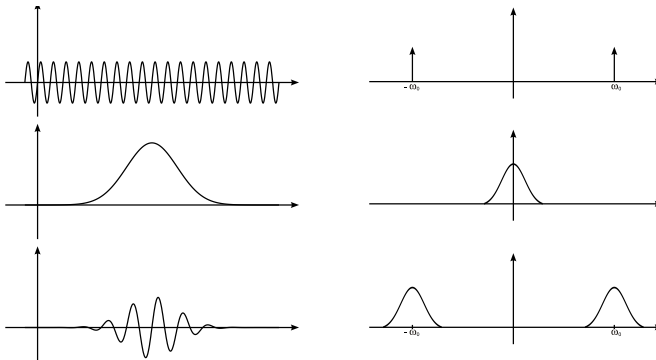


Figura: Janela gaussiana aplicada a uma senoide.

Princípio da Incerteza de Heisenberg



Figura: Magic Mirror of Uncertainty (Duane Michals, 1998)

There is no such uncertainty as a sure thing. (Robert Burns)

Princípio da Incerteza de Heisenberg

O Princípio de incerteza de Heisenberg afirma que não é possível medir com precisão infinita pares de variáveis observáveis. Existirá sempre uma incerteza inerente a toda medida.

A incerteza Δx na medida da posição e a incerteza Δp na medida do momento são tais que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}, \quad (11)$$

sendo h a constante de Planck.

Princípio da Incerteza de Heisenberg - Tempo-Freqüência

A formulação do princípio de incerteza de Heisenberg para o par de variáveis tempo e freqüência é da seguinte forma

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} . \quad (12)$$

Caixas de Heisenberg

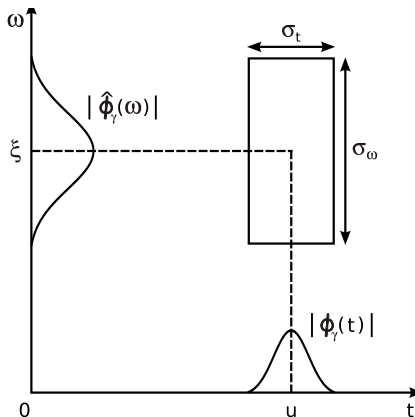


Figura: Caixas de Heisenberg.

Caixas de Heisenberg

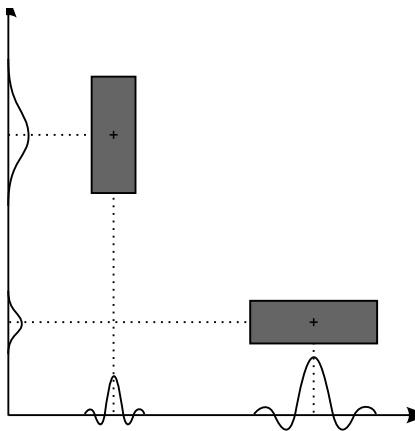


Figura: Caixas Tempo-Freqüência.

Caixas de Heisenberg

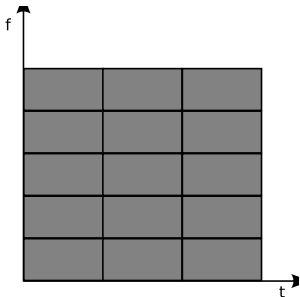


Figura: Caixas de Heisenberg para a transformada Fourier com janela.

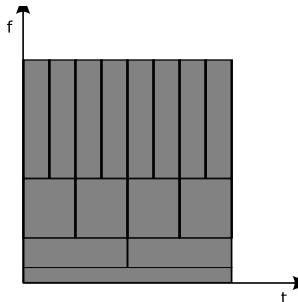


Figura: Caixas de Heisenberg para a transformada wavelet.

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- **Análise em Resoluções Múltiplas**
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Decomposição de uma função

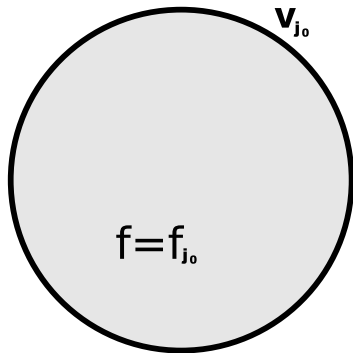


Figura: $f = f_{j_0} = P_{V_{j_0}} f$.

Decomposição de uma função

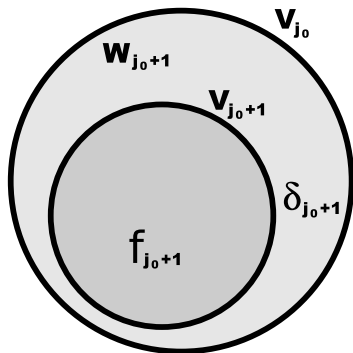


Figura: $f_{j_0} = f_{j_0+1} + \delta_{j_0+1} = P_{V_{j_0+1}} f_{j_0} + P_{W_{j_0+1}} f_{j_0}$.

Decomposição de uma função

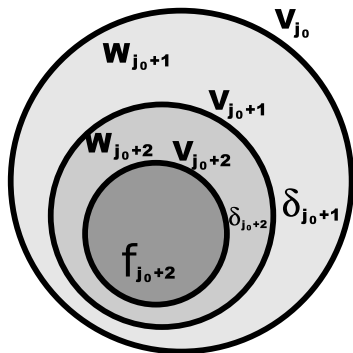


Figura: $f_{j_0+1} = f_{j_0+2} + \delta_{j_0+2} = P_{V_{j_0+2}} f_{j_0+1} + P_{W_{j_0+2}} f_{j_0+1}$.

Subespaços Encaixantes

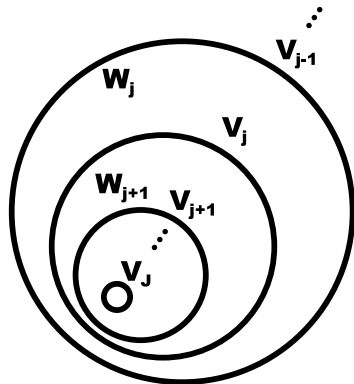


Figura: Seqüência de subespaços encaixantes.

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Relação de Escala

Pela Análise em Múltiplas Resoluções sabemos que $V_0 \subset V_{-1}$, portanto, uma função $\phi \in V_0$ pode ser escrita como

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi_{-1,n}(t) = s_0^{-1/2} \sum_n h_n \phi(s_0 t - k u_0) \quad (13)$$

onde $\{\phi(s_0 \cdot - k u_0)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ constitui uma base para V_{-1} .

De maneira similar, $W_0 \subset V_{-1}$, obtem-se assim:

$$\psi(t) = \sum_n g_n \phi_{-1,n}(t) = s_0^{-1/2} \sum_n g_n \phi(s_0 t - k u_0). \quad (14)$$

Relação de Escala no Domínio de Fourier

$$\hat{\phi}(\omega) = s_0^{-1/2} H\left(\frac{\omega}{s_0}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right). \quad (15)$$

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-jku_0\omega} \quad (16)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = s_0^{-1/2} G\left(\frac{\omega}{s_0}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{s_0}\right). \quad (17)$$

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-jku_0\omega} \quad (18)$$

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Condição de Ortonormalidade

Desejamos que $\phi(t)$ seja ortogonal a $\phi(t - n)$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

$$\langle \phi(x), \phi(x - n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (19)$$

no qual define-se:

$$A(\omega) = |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2. \quad (20)$$

A escolha que garante a ortogonalidade é: $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A(\omega) = 1$, pois $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\omega n} = \delta_n$.

Condição de Ortonormalidade

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1 \quad (21)$$

Usando a relação de escala obtem-se:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\phi} \left(\omega + \frac{2\pi l}{N} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\omega + \frac{2\pi l}{N} \right) \right|^2 = 1 \quad (22)$$

Separando as fases, $l = Nk$, $l = Nk + 1$, \dots , $l = Nk + N - 1$, e usando o fato de que m_0 é periódico com período 2π , obtem-se:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| m_0 \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 = 1 \quad (23)$$

Condição de Ortonormalidade

Faz-se o mesmo para cada uma das famílias $\{\psi^l(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$, $l = 1, \dots, N - 1$, obtendo:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 = 1, \quad l = 1, \dots, N - 1. \quad (24)$$

Condição de Ortogonalidade entre subespaços

Deseja-se a ortogonalidade entre famílias diferentes para que, assim, os subespaços \tilde{V}_j e \tilde{W}_j^l sejam ortogonais entre si, e também para que os subespaços \tilde{W}_j^l e $\tilde{W}_j^{l'}$ sejam ortogonais para $l \neq l'$.

$$\langle \phi(x), \psi^l(x) \rangle = 0 \quad (25)$$

$$\langle \psi^l(x), \psi^{l'}(x) \rangle = 0, \quad \text{para } l \neq l' \quad (26)$$

Condição de Ortogonalidade entre subespaços

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_0 \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \overline{m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right)} = 0 \quad (27)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \overline{m_{l'} \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right)} = 0 \quad (28)$$

para $l \neq l'$.

Condição de Ortogonalidade - Juntando os Resultados

A ortonormalidade dos diferentes subespaços na análise em resoluções múltiplas implica na matriz $N \times N$, $M(\omega)$, com elementos da forma

$$M_{l,k}(\omega) = m_{l-1} \left(\omega + \frac{2\pi}{N}(k-1) \right), \quad (29)$$

ser unitária para todo ω , ou seja, a inversa de M é a transposta complexa conjugada de M : $M^{-1} = M^*$.

Condição de Ortogonalidade - Coeficientes

É possível reescrever M da seguinte forma:

$$M(\omega) = GE(\omega) \quad (30)$$

cujos elementos são dados por:

$$G_{l,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} g_k^l, \quad (31)$$

$$E_{l,k}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{il(\omega + \frac{2k\pi}{N})}, \quad (32)$$

para $l = 0, 1, \dots, M - 1$ e $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Mostra-se que E é uma matriz unitária e, para M também ser unitária, é necessário que G seja unitária.

Qualquer matriz ortogonal de tamanho $n \times n$ pode ser construída com um produto de não mais que n matrizes de reflexão de Householder.

Outline I

- 1 Audição
 - Resposta na Cóclea
- 2 Wavelets
 - Definição
 - Wavelet de Haar
 - Transformada Wavelet Discreta
 - Localização Tempo-Freqüência
 - Análise em Resoluções Múltiplas
 - Relação de Escala
 - Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier
- 3 Construção das Wavelets
 - Projeto de m_0
- 4 Conclusões

Relembrando as condições de ortonormalidade

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \right|^2 = 1, \quad (33)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_l \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right) \overline{m_{l'} \left(\omega + \frac{2\pi i}{N} \right)} = 0, \quad (34)$$

para $l \neq l'$ e $l, l' = 0, 1, \dots, N-1$.

Outline I

1 Audição

- Resposta na Cóclea

2 Wavelets

- Definição
- Wavelet de Haar
- Transformada Wavelet Discreta
- Localização Tempo-Frequência
- Análise em Resoluções Múltiplas
- Relação de Escala
- Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier

3 Construção das Wavelets

- Projeto de m_0

4 Conclusões

Projeto de m_0

Aplicando a condição $\hat{\phi}(0) = 1$ na relação de escala:

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad (35)$$

obtem-se $m_0(0) = 1$ e, assim, $|m_0(0)|^2 = 1$. Usando 35 na relação 33, conclui-se que

$$\left| m_0\left(\omega + \frac{2\pi i}{N}\right) \right|^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (36)$$

Escolha

Faz-se a seguinte escolha para que m_0 tenha zeros em $\omega = 2\pi i/N$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$: $m_0(\omega) \propto Q(\omega)$, sendo

$$Q(\omega) = \prod_{k=1}^{N-1} q_k^M(\omega) = \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1 + e^{-i(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N})}}{N^{\frac{1}{N-1}}} \right)^M. \quad (37)$$

Alguns Exemplos de Q

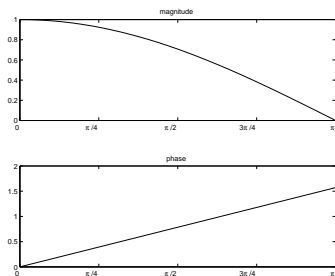


Figura: $Q(\omega)$ com $N = 2$.

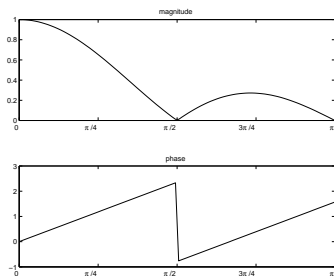


Figura: $Q(\omega)$ com $N = 4$.

Alguns Exemplos de Q

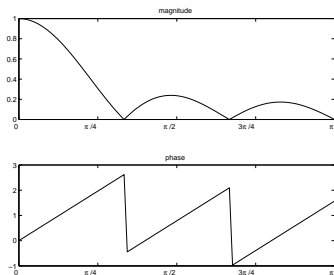


Figura: $Q(\omega)$ com $N = 6$.

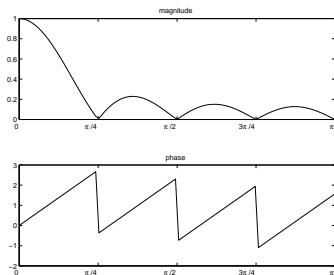


Figura: $Q(\omega)$ com $N = 8$.

Define-se

$$M_0(\omega) = |m_0(\omega)|^2, \quad (38)$$

já que na Equação 33 utilizou-se o módulo de m_0 .

$$|Q(\omega)|^2 = \prod_{k=1}^{N-1} |q_k^M(\omega)|^2, \quad (39)$$

mas cada termo $q_k(\omega)$ é dado por:

$$\begin{aligned} q_k^M(\omega) &= \left(\frac{1 + e^{-i(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N})}}{N^{\frac{1}{N-1}}} \right)^M \\ &= \frac{1}{N^{\frac{M}{N-1}}} (1 + z_k)^M \\ &= \frac{1}{N^{\frac{M}{N-1}}} \sum_{l=0}^M \binom{M}{l} z_k^{M-l}. \end{aligned} \quad (40)$$

$$|q_k^M(\omega)|^2 = \left(\Re\{q_k^M\}\right)^2 + \left(\Im\{q_k^M\}\right)^2, \quad (41)$$

$$|Q(\omega)|^2 = \frac{1}{N^{\frac{2M}{N-1}}} \prod_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \cos \left((M-l) \left(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N} \right) \right) \right)^2 + \left(\sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \operatorname{sen} \left((M-l) \left(\omega + \pi - \frac{2k\pi}{N} \right) \right) \right)^2. \quad (42)$$

M_0 será dado por:

$$M_0(\omega) = |Q(\omega)|^2 L(\omega), \quad (43)$$

em que, $L(\omega)$ é um polinômio em $\cos(\omega)$. Note que, ainda sim, resolver

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_0(\omega + 2k\pi/N) = 1 \quad (44)$$

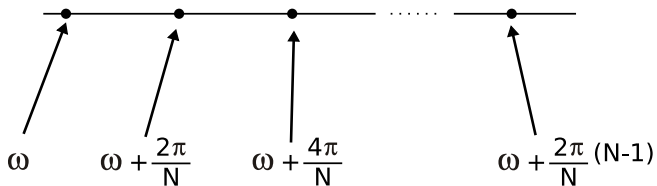
não é trivial.

Usando 43 em 44

$$\sum_{k=0}^{N-1} |Q(\omega + 2k\pi/N)|^2 L(\omega + 2k\pi/N) = 1. \quad (45)$$

De forma a escrever a Equação 45 de forma mais concisa, faz-se $A_k^M(\omega) = |Q(\omega + \gamma_k)|^2$, em que $\gamma_k = \frac{2k\pi}{N}$ e, de maneira análoga, $L_k(\omega) = L(\omega + 2k\pi/N)$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} A_k^M(\omega) L_k(\omega) = 1. \quad (46)$$



É possível reescrever as equações na forma de um sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} A_0^M(\omega) & A_1^M(\omega) & A_2^M(\omega) & \dots & A_{N-1}^M(\omega) \\ A_{N-1}^M(\omega) & A_0^M(\omega) & A_1^M(\omega) & \dots & A_{N-2}^M(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^M(\omega) & A_2^M(\omega) & A_3^M(\omega) & \dots & A_0^M(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0(\omega) \\ L_1(\omega) \\ L_2(\omega) \\ \vdots \\ L_{N-1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathbf{A}(\omega) \vec{\mathbf{L}}(\omega) = \mathbf{1}. \quad (48)$$

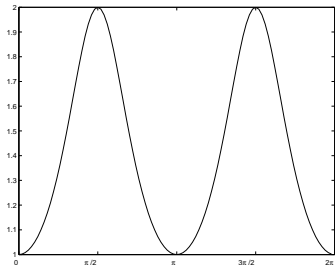


Figura: $L(\omega)$ com $N = 2$ e $M = 2$.

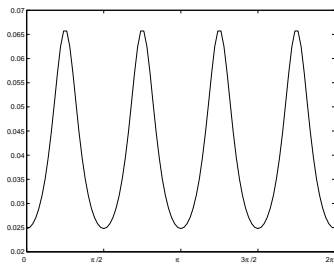


Figura: $L(\omega)$ com $N = 4$ e $M = 2$.

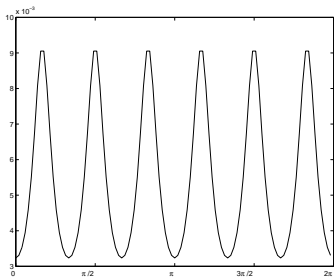


Figura: $L(\omega)$ com $N = 6$ e $M = 2$.

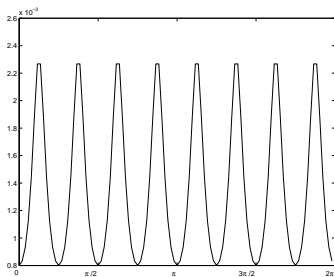


Figura: $L(\omega)$ com $N = 8$ e $M = 2$.

Resultados Analíticos

Para $N = 2$ e $M = 1$ obtem-se

$$|Q(\omega)|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos(\omega)). \quad (49)$$

Aplicando o resultado 49 em

$$|Q(\omega)|^2 L(\omega) + |Q(\omega + \pi)|^2 L(\omega + \pi) = 1, \quad (50)$$

é verifica-se que $L(\omega) = 1$ é uma solução da Equação 50.

Resultados Analíticos

Para $N = 2$ e $M = 2$

$$|Q(\omega)|^2 = \frac{1}{4}(\cos(\omega) + 1)^2. \quad (51)$$

Aplicando o resultado 51 em

$$|Q(\omega)|^2 L(\omega) + |Q(\omega + \pi)|^2 L(\omega + \pi) = 1, \quad (52)$$

é verifica-se que $L(\omega) = \frac{2}{\cos^2(\omega)+1}$ é uma solução da Equação 52.

$$|m_0(\omega)|^2 \longrightarrow m_0(\omega)?$$

Lemma

Seja A um polinômio trigonométrico positivo contendo apenas cossenos, $A(\omega) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega)$ (com $a_n \in \mathbb{R}$), então, existe um polinômio trigonométrico B , também de ordem N ,

$B(\omega) = \sum_{n=0}^N b_n e^{in\omega}$, com coeficientes b_n , tal que:

$$|B(\omega)|^2 = A(\omega). \quad (53)$$

Determinando $A(\omega)$ e $B(\omega)$

Fazendo $x = e^{i\omega}$

Basta ajustar o polinômio de grau $2N$ para a função $2x^N A(\omega)$.

$$2x^N A(\omega) = a_N x^{2N} + a_{N-1} x^{2N-1} + \dots + \quad (54)$$

$$+ a_1 x^{N+1} + 2a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x^1 + a_N,$$

Para obter os coeficientes b_n basta dividir os coeficientes a_n por 2.

Outline I

- 1 Audição
 - Resposta na Cóclea
- 2 Wavelets
 - Definição
 - Wavelet de Haar
 - Transformada Wavelet Discreta
 - Localização Tempo-Freqüência
 - Análise em Resoluções Múltiplas
 - Relação de Escala
 - Condições de Ortogonalidade no Domínio de Fourier
- 3 Construção das Wavelets
 - Projeto de m_0
- 4 Conclusões

Resultados Obtidos

- Determinou-se uma condição sobre os coeficientes de filtros para que se tenha reconstrução perfeita.
- Estendeu-se a construção de m_0 feita por Daubechies para o um fator de escala qualquer inteiro N .
- Mostrou-se como determinar numericamente o filtro m_0 .
- Tanto os resultados numéricos quanto os analíticos são soluções.

Em aberto

- Como determinar os demais filtros de forma que satisfaçam as condições mostradas?
- Apesar do resultado encontrado ser uma solução, por que no caso em que o fator de escala é igual a dois o resultado é diferente do encontrado por Ingrid Daubechies?

Comparando os Resultados

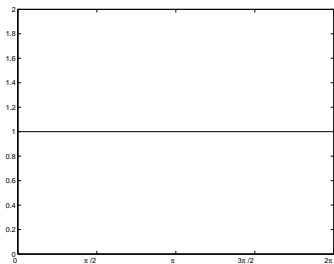


Figura: Resultado obtido por I. Daubechies para $M=1$.

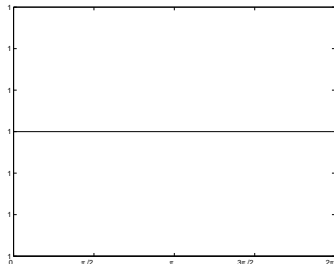


Figura: Resultado aqui obtido para $M=1$.

Comparando os Resultados

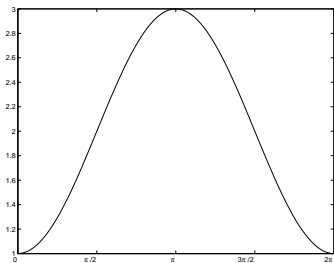


Figura: Resultado obtido por I. Daubechies para $M=2$.

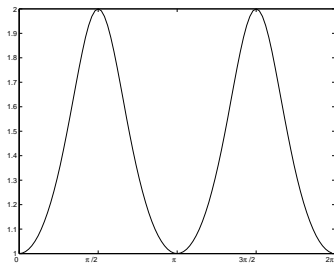


Figura: Resultado aqui obtido para $M=2$.

Comparando os Resultados

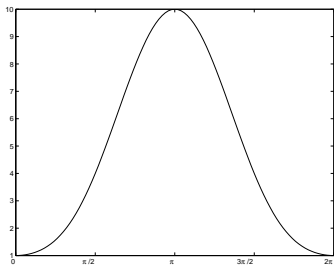


Figura: Resultado obtido por I. Daubechies para $M=3$.

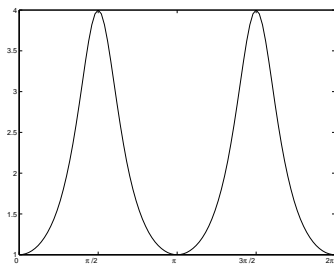


Figura: Resultado aqui obtido para $M=3$.

Comparando os Resultados

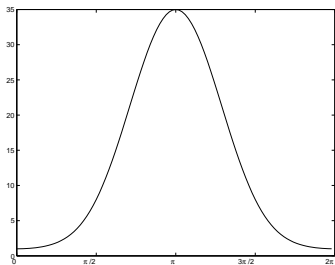


Figura: Resultado obtido por I. Daubechies para $M=4$.

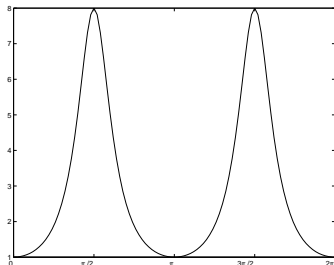


Figura: Resultado aqui obtido para $M=4$.

Fim

Obrigado!

